# Analysis II

Bernold Fiedler

SoSe 2009

Dieses Dokument wurde auf der Grundlage eigener Vorlesungsmitschriften erstellt. Es ist lediglich zur privaten Nutzung als Lernhilfe gedacht und wird für diesen Zweck unentgeltlich zur Verfügung gestellt. Daher werden weder Richtigkeit noch Vollständigkeit garantiert. Insbesondere ist das Dokument nicht von Prof. Dr. Bernold Fiedler autorisiert.

## Inhaltsverzeichnis



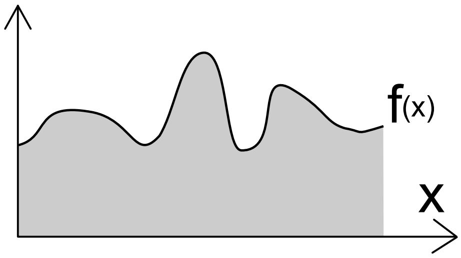

Mitschrift erstellt von Alexander Fritz und Matthias Bosewitz.
Alle Graphiken von Matthias Bosewitz.

# 4 Integration

Vorlesung 14.04.09

## Einleitung

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad = $$




$$\int \approx \text{Summe} \sim \sum$$

$$\text{Lineare Algebra:} \quad \int f + \int g = \int (f+g)$$

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

### 4.1 Ausflug in die Lineare Algebra

Betrachte Vektorräume $X, Z$ über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit den Normen $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z$.

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x\| &= |\lambda| \cdot \|x\| \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Wenn X, bzw. Y zudem vollständig: Banachraum

**Definition 4.1.** Eine Abbildung $F : X \to Z$ heißt ***stetig*** wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0 \;:\; \|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|F(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon$$

**Definition 4.2.** Eine Lineare Abbildung $L : X \to Z$ heißt ***beschränkt*** wenn das Bild der Einheitskugel unter $L$ beschränkt ist, d.h.

$$\|L\| \;:=\; \sup\{\|Lx\| \mid x \in X \;,\; \|x\| \leq 1\} < \infty$$

($\|L\|$ ist Abbildungsnorm von $L$)

**Beispiel.**

$$Z = \mathbb{R} \qquad F(x) \;:=\; \|x\|$$

$$\|\;\|x\| - \|x_0\|\;\| \leq \|x - x_0\| \;\text{ da stetig}$$

**Lemma 4.3.** *Sei $L : X \to Z$ linear, $X, Z$ normierte Vektorräume. Dann gilt: $L$ stetig $\Longleftrightarrow$ $L$ beschränkt.*

$$\left( \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \right)$$

**Beweis:**

*1. Schritt:* $L$ stetig $\Longleftrightarrow L$ stetig in $x_0 = 0$ denn „$\Leftarrow$“ trivial.

$$\begin{aligned} \text{„}\Rightarrow\text{“}: \quad & \|Lx - Lx_0\| && = \|L(x-x_0)\| && \leq \varepsilon \text{ wenn } \|x - x_0\| < \delta \\ & \text{(Stetigkeit von } L \text{ in } 0,\ L0 = 0) && && \\ & && = \|Lx - L0\| && \leq \varepsilon \end{aligned}$$

*2. Schritt:* $L$ beschränkt $\Rightarrow L$ stetig in $0$

$$\|Lx - L0\| = \|Lx\| \leq \|L\| \cdot |x| \qquad (\text{da } L \text{ beschr.}, \ |x| \leq \delta)$$

für $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\|L\|}$

Sei $x \neq 0$ beliebig, dann $Lx = L\left(\frac{x}{|x|} \cdot |x|\right) = |x| \cdot L\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq \|L\| \cdot |x|$

*3. Schritt:* $L$ stetig in $0 \Rightarrow L$ beschränkt zu $\varepsilon := 1 > 0$ wähle $\delta > 0$ sodass $|x| < \delta$
$\Rightarrow |Lx| \leq \varepsilon = 1$

$$\text{Also gilt für } |x| \leq 1 \ : \ |Lx| = \left| L\left(\frac{1}{\delta}\delta x\right)\right| \leq \frac{1}{\delta} |L(\delta x)| \leq \frac{1}{\delta} \cdot 1 \qquad \square$$

Sei $Y \subseteq X$. Abschluss: $\bar{Y} := \{\bar{y} \in X \mid \text{ex. } Y \ni y_n \to \bar{y}\}$

**Beispiel.** $Y$ linearer Unterraum von $X \implies \bar{Y}$ auch.
Denn: $y_n \to \bar{y} \in \bar{Y}$ , $\bar{y}' \in \bar{Y}$

$$\Rightarrow \lim\left(y_n + y_n'\right) = \lim y_n + \lim y_n' = \bar{y} + \bar{y}' \in \bar{Y}$$

Rechenregeln: $\|\cdot\|_x$ statt Betrag.

$$\lambda \in \mathbb{K} \ \Rightarrow \ \lim(\lambda y_n) = \lambda \lim y_n = \lambda \bar{y} \in \bar{Y}.$$

**Satz 4.4.** *Seien $X, Z$ normierte Vektorräume ($Z$ Banachraum). $Y$ Teilraum von $X, L : Y \to Z$ linear beschränkt (d.h. stetig). Dann besitzt $L$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu $\bar{L} : \bar{Y} \to Z$, stetig mit $L$ linear, beschränkt, $\|\bar{L}\| = \|L\|$.*
(Fortsetzung: $\bar{L}|y = L$)

**Beweis:** Versuche $\bar{L}$ auf die einzig mögliche Weise zu definieren:

$$\bar{L}\bar{y} := \lim Ly_n, \text{ für } \ y_n \to \bar{y}$$

Schritt 1: $Ly_n$ konvergent

$$\begin{aligned} \text{denn } |Ly_n - Ly_m| = |L(y_n - y_m)| \quad & \leq \quad && \|L\| \cdot |y_n - y_m| \\ \text{Cauchy, also konvgt.} \quad & \Leftarrow \quad && \text{Cauchy weil konvergent} \end{aligned}$$

Schritt 2: $\bar{L}$ ist wohldefiniert. D.h.:

$$\lim Ly_n = \lim Ly_n' \text{ falls } y_n' \to \bar{y} \leftarrow y_n$$

$$y_n - y_n' \to 0, \text{ also } \left|Ly_n - Ly_n'\right| = \left|L\left(y_n - y_n'\right)\right| \leq \|L\| \cdot \underbrace{\left|y_n - y_n'\right|}_{\to 0} \to 0$$

$$\text{Also } \lim Ly_n = \lim Ly_n'$$

Schritt 3: Linearität: $y_n \to \bar{y}$ , $y_n' \to \bar{y}' \implies$

$$\begin{aligned} L\left(\bar{y}+\bar{y}'\right) &= L \lim\left(y_n + y_n'\right) &&= \lim\left(Ly_n + Ly_n'\right) \\ &= \lim Ly_n + \lim Ly_n' &&= \bar{L}\bar{y} + \bar{L}\bar{y}' \end{aligned}$$

$$\text{Analog } \bar{L}\left(\lambda\bar{y}\right) = \lambda\bar{L}\bar{y} \quad (\forall\lambda\in\mathbb{K})$$

Schritt 4: $\left\|\bar{L}\right\| = \|L\|$

$$\begin{aligned} \text{Trivial: } & \left\|\bar{L}\right\| \geq \|L\| \text{ da } \|L\| := \sup\left\{|Lx| \mid |x| \leq 1\right\} \\ \text{Zeige also: } & \left\|\bar{L}\right\| \leq \|L\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Sei } \bar{y} \to \bar{y} = \lim y_n, \quad y_n \in Y \\ \text{Dann folgt } &\left\|\bar{L}\bar{y}\right\| = \left\|\lim Ly_n\right\| = \lim\left\|Ly_n\right\| \leq \lim\|L\|\cdot\|y_n\| \\ &= \|L\|\cdot\|\bar{y}\| \leq \|L\| \text{ falls } \|\bar{y}\| \leq 1 \\ &\implies \left\|\bar{L}\right\| \leq \|L\| < \infty \\ &\text{Also } \bar{L} \text{ beschränkt, } \bar{L} \text{ stetig, } \left\|\bar{L}\right\| = \|L\|. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Treppenfunktionen, Regelfunktionen, Integrale

Sei $[a,b] \leq \mathbb{R}$ Intervall, $Z = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (oder Banachraum)

**Definition 4.5.** Wir nennen $\{a_0, \ldots, a_n\}$ ***Partition*** von $[a,b]$, wenn

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$$

***Korn:*** $\eta(P) := \max_i\left(a_i - a_{i-1}\right)$, längstes Teilintervall.

Wir nennen $f : (a,b] \to Z$ ***Treppenfunktion*** zu $P$ (kurz $f \in T_P = T_P\left([a,b], Z\right)$ ) wenn $f_i$ existieren mit $f(t) = f_i$ für alle $a_{i-1} < t < a_i$.

Wir nennen $I_P(f) := \sum_{i=1}^{n} f_i\left(a_i - a_{i-1}\right)$ das ***Integral*** der Treppenfunktion $f \in T_P$

*Bemerkung:* Wir nennen $Q$ Verfeinerung von $P$ wenn $Q \geq P$
*N.B.:* $I_Q(f) = I_P(f)$ für $f \in T_P$. Denn sei $Q = P \cup \{c\}$ , $a_{i-1} < c < a_i$
$\implies \quad I_Q(f) - I_P(f) = f_i\left(a_i - c\right) + f_i\left(c - a_{i-1}\right) - f_i\left(a_i - a_{i-1}\right) = 0$

Also gilt für $f$ Teppenfunktion zu $P_1$ und $P_2$, dass $I_{P_1}f = I_{P_1\cup P_2}f = I_{P_2}f$ (Unabhängig von der Partition). Wir haben also ein Integral auf allen Treppenfunktionen $T\left([a,b], Z\right)$ definiert.

*Idee:*

Vorlesung 16.04.09

$$X \ := \ \{f : [a,b] \to Z \mid f \text{ beschränkt}\}$$

Die verwendete Norm ist die Supremumsnorm:

$$\|f\| := \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|_Z$$

sogar Banachraum: Cauchyfolge $f_n \in X$, $f(t) := \lim f_n(t)$ punktweise, d.h. für jedes feste $t \in [a,b] \Longrightarrow \|f_n - f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
denn:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \\ &\le \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| \underset{n\le n_0}{\le} \varepsilon \\ \Longrightarrow \|f_n - f\| &\le \varepsilon \end{aligned}$$

**Definition 4.6.** ***Regelfunktionen:*** $Y := T$; $\quad R := \overline{T}$ = gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen

**Definition 4.7.** ***Regelintegral:*** $\int\limits_a^b f \ := \ \bar{I}(f)$ für alle $f \in R = \overline{T}$

**Satz 4.8.** *$T$ ist normierter linearer Teilraum von $X$, $I = I_P$ ist linear auf $T$ und beschränkt. Insbesondere*

$$\left\|\bar{I}\right\| = \|I\| = (b-a), \ \textit{d.h.}$$

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \le (b-a)\cdot\|f\| = (b-a)\cdot\sup_{a\le t\le b}\|f(t)\|$$

**Beweis:** $f, g \in T$, $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ $\lambda\cdot f + g \in T$ (Partitionen zu $f$ und $g$ vereinigen)
Also ist $T$ linearer Teilraum von $X$ = beschränkte Funktionen = $B([a,b], Z)$
$I_P$ linear:

$$\begin{aligned} I_P(\lambda f) &= \sum_j \lambda f_i \cdot (a_j - a_{j-1}) &&= \lambda \cdot I_P(f) \\ I_P(f+g) &= \sum (f_j + g_j)\cdot(a_j - a_{j-1}) &&= I_P(f) + I_P(g) \end{aligned}$$

(mit gemeinsamen Partitionen $P$ zu $f$ und $g$)
$I_P$ beschränkt:

$$\begin{aligned} |I_P(f)| &\le \left|\sum_j f_j \cdot (a_j - a_{j-1})\right| \\ &\le \|f\| \cdot \underbrace{\sum_j (a_j - a_{j-1})}_{\text{Teleskop}} = \|f\| \cdot (b-a) \\ \Longrightarrow \|I\| &\le (b-a) \end{aligned}$$

Für '=' setze $f \equiv 1 \Rightarrow I(f) = b - a, \|f\| = 1$ $\square$

**Korollar 4.9.** *Das Regelintegral ist*

*(i) beschränkt:* $\left|\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \le (b-a)\cdot \sup\limits_{a\le t\le b} |f(t)|$

*(ii) stetig:* $\quad f_n \to f \text{ in } X \Rightarrow \lim \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

*(iii) linear:* $\quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \cdot \int_a^b f + \int_a^b g$

*(iv) additiv:* $\quad a \leq c \leq b \longrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

*(v) monoton:* $\quad (Z = \mathbb{R}), f \leq g,$ *d.h.:* $\quad \forall t \in [a,b] \ : \ f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

**Beweis:** (i) - (iii) folgt aus Konstruktion und Satz 4.4 (S. 5) mit $L := I$, $Y := T$, $Z := Z$.
(vi) trivial für Treppenfunktionen, also

$$\begin{array}{ccccc} \int_a^b f_n & = & \int_a^c f_n + \int_c^b f_n \ , & f_n \in T \\ \big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & & \big\downarrow \\ \int_a^b f & = & \int_a^c f + \int_c^b f \ , & f \in R \end{array}$$

(v) OE $f = 0$, sonst betrachte $f - f$, $g - f$, benutze Linearität. Für $g \geq 0$, $g \in R$ betrachte $g_n \underset{X}{\to} g$. Dann auch mit $g_n^+(t) = \max(0, g_n(t))$: $(\forall t \ : \ g_n^+ \to g)$, also $0 \leq \int_a^b g_n^+ \to \int_a^b g$ $\qquad \square$

**Satz 4.10.** *Regelfunktionen sind genau die Funktionen in*

$$R' := \{f \ : \ [a,b] \to Z \mid \textit{einseitige Limites existieren stets}\},$$

*d.h.* $\lim\limits_{t \nearrow \tau,\ t \neq \tau} f(t)$, $\lim\limits_{t \searrow \tau,\ t \neq \tau} f(t)$ *existieren.*
*kurz:* $R' = R$

**Beweis:** Wir bemerken

$$(1) \quad T \subseteq R', \text{ trivial}$$

*Plan:* $R = \overline{T} \overset{(1)}{\subseteq} \overline{R'} \overset{(2)}{=} R' \overset{(3)}{\subseteq} \overline{T}$
Dann folgt $R = R'$.
*zu (2):* Sei $R' \ni f_n \to f$. Zeige: $f \in R'$, d.h.

$$(*) \quad \forall \tau \in (a,b] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t,\ t' \in (\tau - \delta, \tau) \ : \ \big(\left|f(t) - f(t')\right| \leq \varepsilon\big)$$

(und ebenso von oben für $\tau \in [a,b)$)
Um $(*)$ zu zeigen, wähle $n_0$ so, dass $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Ferner gilt $(*)_{n_0}$ für $f_{n_0} \in R'$ statt $f$. Zusammen also

$$\begin{array}{rcllll} \left|f(t) - f(t')\right| & \leq & |f(t) - f_{n_0}(t)| & + \ \left|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t')\right| & + & \left|f_{n_0}(t') - f(t')\right| \\ & \leq & \|f - f_{n_0}\| & + \ \varepsilon & + & \|f_{n_0} - f\| \\ & \leq & 3 \cdot \varepsilon & & & \end{array}$$

*zu (3):* $T$ dicht in $R'$.
*Ziel:* zu gegebenen $f \in R'$, $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in T$ finden mit $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$.
Setze

$$J := \{\beta \in [a, b] \mid \exists \varphi \in T \ \forall t \in [a, \beta] \ : \ |f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon\}$$

Zeige: $J = [a, b]$
*Beweisidee: Analytische Induktion*

1. Anfang: $a \in J$
2. Schritt: $\beta \in J$ und $\beta < b \Rightarrow \exists \beta' > \beta$ mit $\beta' \in J$
3. $\sup J \in J$
   Dann folgt tatsächlich $\bar{\beta} := \sup J = b$. Denn $\bar{\beta}$ existiert (wegen (1.), $J \neq 0$) und $\bar{\beta} < b$ wegen (2.) und (3.).

Konkret für unser $J$:

1. $a \in J$: $\quad \varphi(a) := f(a)$, trivial
2. Für $t \leq b$ definiere $\varphi$ wie durch $\beta \in J$ gegeben. Setze $\varphi(t) := \lim\limits_{t' \to \beta} f(t')$ für $t \searrow \beta$.
   Dann existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall t \in (\beta, \beta + \delta] \ : \ \|f(t) - \underbrace{\lim_{t' \searrow \beta} f(t')}_{\varphi(t)}\| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \beta' := \beta + \delta \in J$$

3. Setze $\bar{\beta} := \sup J > a$
   Definiere

$$\varphi(t) := \lim_{t' \nearrow \bar{\beta}} f(t') \text{ für } t \in \left[\bar{\beta} - \delta, \bar{\beta}\right)$$
$$\varphi\left(\bar{\beta}\right) := f\left(\bar{\beta}\right)$$

   Dabei ist $\delta > 0$ wieder so gewählt, dass

$$\forall t \in \left(\bar{\beta} - \delta, \bar{\beta}\right) \ : \ |f(t) - \underbrace{\lim_{t' \nearrow \bar{\beta}} f(t')}_{\varphi(t)}| < \varepsilon$$

   Für $t \in \left[a, \bar{\beta} - \delta\right]$ definiere $\varphi$ gemäß $\bar{\beta} - \delta \in J$. Dann folgt wieder $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ auf $a \leq t \leq \bar{\beta}$. Also $\bar{\beta} \in J$.

□

*Bemerkung:* Vektorwertige Funktionen $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N$ können leicht integriert werden, nämlich komponentenweise:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\ \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b f_N(t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Dies stimmt für endliche Summen, also für Treppenfunktionen, also wegen Korollar 4.9 (S. 7) und Stetigkeit für Regelfunktionen.

*Bemerkung:* Insbesondere können wir also stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\ Z) \subseteq R$ integrieren. Beispielsweise wissen wir Vorlesung 21.04.09

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\,(a_k - a_{k-1})$$

wobei $f_k$ ein beliebiger Funktionswert von $f$ auf dem Intervall $[a_{k-1}, a_k]$ ist und für $n \to \infty$ die Partionen $P_n$ so gewählt sind, dass ihr Korn $\eta\,(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Denn $f$ stetig auf $[a,b]$ $\implies$ $f$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, d.h. $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f\,(t_1) - f\,(t_2)| < \varepsilon$. Also gilt für Korn $\eta\,(P_n) < \delta$ auch $\|\varphi - f\| < \varepsilon$ wenn $\varphi \in T$ die Werte $f_k$ in den Intervallen $[a_{k-1}, a_k]$ hat. Folglich gilt

$$\left| \int_a^b f - \underbrace{I_P\,(\varphi)}_{\text{unsere Summe}} \right| = \left| \int_a^b (f - \varphi) \right| \leq \left\|\bar{I}\right\| \cdot \underbrace{\|f - \varphi\|}_{\text{sup-Norm}} < (b-a)\cdot\varepsilon \qquad \square$$

Das Integral stetiger Funktionen kann also, z.B. per Computer oder von Hand und Hirn, „numerisch“ approximiert werden.
*Umgekehrt* könnten wir aber auch Integrale benutzen, um (die sie angeblich approximierenden) Summen abzuschätzen.
*Spezialfall:* Wähle statt $f_k$

$$\overline{f_k} := \max_{[a_{k-1},a_k]} f, \text{ bzw. } \underline{f_k} := \min_{[a_{k-1},a_k]} f$$

Dann folgt für die entsprechenden Treppensummen $I(\overline{\varphi})$ bzw. $I(\underline{\varphi})$, dass

$$I(\underline{\varphi}) \ \leq\ \int_a^b f \ \leq\ I(\overline{\varphi}) \quad \text{d.h.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{f_k}\,(a_k - a_{k-1}) \ \leq\ \int_a^b f \ \leq\ \sum_{k=1}^{n} \overline{f_k}\,(a_k - a_{k-1})$$

*Beweis:* Monotonie des Integrals

## 4.3 Hauptsätze

Stets $f : [a,b] \to Z^{\text{Banach}}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$

**Satz 4.11** (Fundamentalsatz der Analysis).
[Barrow] *(1630-1677)*
[Newton] *(1642-1727)*
[Leibniz] *(1646-1716)*
*Sei $f \in R$, stetig in $c \in (a,b)$, $F : [a,b] \to Z$,* $\quad F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
*Dann ist $F$ in $c$ stetig differenzierbar und es gilt*

$$F'(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ F(x)\bigg|_{x=c} := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(F(c+h) - F(c)) = f(c)$$

*(Integration als „inverse“ Differentiation, jedenfalls für $F(a) = 0$)*

**Beweis:**

$$\left|\frac{1}{h}\left(F(c+h) - F(c)\right) - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int\limits_c^{c+h} \left(f(t) - f(c)\right)\, \mathrm{d}t\right)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int\limits_c^{c+h} \underbrace{|f(t) - f(c)|}_{\leq\varepsilon \text{ für } |h|\leq\delta}\, \mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

für $h > 0$. Analog: $h < 0$ □

**Definition 4.12.** $F \in \mathcal{C}^1$ heißt ***Stammfunktion*** zu $f$, wenn $f = F'$.

**Proposition 4.13.** *Seien $F_1, F_2$ Stammfunktionen zum selben $f$. Dann existiert $\mathrm{C} \in Z$, konstant, mit $F_2(t) = F_1(t) + \mathrm{C} \quad (\forall\ t)$*
Denn: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_2 - F_1) \equiv 0$, *also* $F_2 - F_1 =: \mathrm{C} =$ *konstant.*
*($\mathbb{R}$ : klar, Mittelwertsatz)*
*($\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$: komponentenweise)*
*(Banachraum: $\rightarrow$ S.Lang)*

**Korollar 4.14.** *Sei $F$ beliebige Stammfunktion zu $f \in \mathcal{C}^0$. Dann gilt:*

$$\int\limits_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - F(a) := [F(t)]_a^b$$

**Beweis:** Nach Fundamentalsatz 4.11 (S. 10) ist $\tilde{F}(x) := \int\limits_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ ebenfalls Stammfunktion zu $f$. Nach Proposition 4.13 folgt

$$\begin{aligned}
& \tilde{F}(x) = F(x) + \mathrm{C} \qquad (\forall x \in [a,b]) \\
x = a: \quad & 0 = F(a) + \mathrm{C}, \text{ also } \mathrm{C} = -F(a) \\
x = b: \quad & \int\limits_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = F(b) + \mathrm{C} = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$
□

**Beispiel.** Berechne $\int\limits_0^x t^\alpha\, \mathrm{d}t$

1. *Idee:* Stammfunktion
   Wir raten (klug wie wir sind) die Stammfunktion $F(t) := \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$ zu $f(t) := t^\alpha \quad (\alpha \geq 0, t \geq 0)$. Folglich gilt:

$$\int\limits_0^x \mathrm{d}t = [F(t)]_0^x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$$

2. *Idee:* á la Leibniz

$$\int\limits_0^x t^\alpha\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \underbrace{\left(k\frac{x}{n}\right)^\alpha}_{f_k} \cdot \underbrace{\frac{x}{n}}_{a_k - a_{k-1}}$$

$$= x^{\alpha+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \qquad \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k^\alpha\right)}$$

$$S_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha+1}{k+1} B_{\alpha-k}(n+1)^{k+1}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k x^k$$

$$= x^{\alpha+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \qquad \left( \underbrace{\frac{1}{\alpha+1}}_{B_0=1} \cdot n^{\alpha+1} + \frac{1}{2} n^\alpha + \cdots + \alpha_{n,1} \cdot n \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$$

**Satz 4.15** (Substitions- oder Transformationssatz)**.** *Seien $J_1, J_2$ Intervalle, $J_1 = [a,b]$, $f : J_1 \to J_2$ in $\mathcal{C}^1$, $g : J_2 \to Z$ stetig.*
*Dann gilt*

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b g(\underbrace{f(\tau)}_{t})\ \underbrace{f'(\tau)\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}t}$$

*($t = f(\tau)$, $\mathrm{d}t = f'(\tau)\mathrm{d}t$)*

**Beweis:** Sei $G$ Stammfunktion zu $g$ Kettenregel: $(G \circ f)' = (G' \circ f) \cdot f' = (g \circ f) \cdot f'$ also $G \circ f$ Stammfunktion zu $(g \circ f) \cdot f'$.

Folglich: $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\ \mathrm{d}t = [G(t)]_{f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)) = [(G \circ f)(\tau)]_a^b = \int_a^b g(f(\tau)) f'(\tau)\ \mathrm{d}\tau$

□

**Satz 4.16.** *(Partielle Integration)*
*Seien $f, g\ :\ [a,b] \to \mathbb{K}$ beide $\mathcal{C}^1$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(t)\ g(t)\ \mathrm{d}t = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f(t)\ g'(t)\ \mathrm{d}t$$

**Beweis:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (Produkt-Regel)
$\Longrightarrow [f \cdot g]_a^b = \int_a^b (f \cdot g)'\ \mathrm{d}t = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$ □

## 4.4 Beispiele

*1. Zum Fundamentalsatz:*

(i) $\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = [\log t]_1^x = \log x$ (weil $(\log t)' = \frac{1}{t}$)

(ii) $\int\limits_0^x \sin t \, \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x$

(iii) $\int\limits_0^x e^t \, \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$

*2. Zur Substitution:*

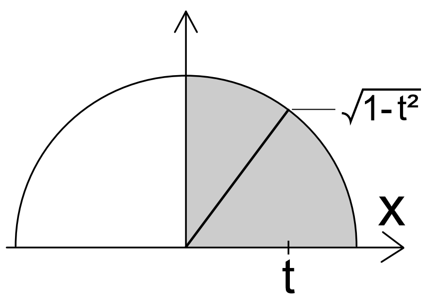
(i)
$$\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_0^{\arcsin(x)} \frac{\cos\tau \, \mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\sin^2\tau}} = \arcsin x \qquad (t = \sin\tau, \, \mathrm{d}t = \cos\tau \, \mathrm{d}\tau)$$

*Alternative:* Potenzreihen
$$\begin{aligned}\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} &= \int\limits_0^x \left(\sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-t^2\right)^k\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \arcsin x \\ &\Longrightarrow \text{ Potenzreihe für } \arcsin x \quad \square\end{aligned}$$

(ii) Substituiere: $t = \sin\tau$, $\mathrm{d}t = \cos\tau \, \mathrm{d}t$ Vorlesung 23.04.2009
Additionstheoreme: $\cos(2\tau) = \cos^2\tau - \sin^2\tau = 2\cos^2\tau - 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^x \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t &= \int\limits_0^{\arcsin x} \cos^2\tau \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\arcsin x} (1 + \cos(2\tau)) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\tau + \frac{1}{2}\sin(2\tau)\right]_0^{\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin x)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin x + \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

*Beispiel:* $x = 1$
$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot (\text{Fläche des Einheitskreises})$$
$$\Longrightarrow \text{Kreisfläche} = \pi$$



(iii) $\int \frac{p(t)}{q(t)}\mathrm{d}t$; beliebige reelle rationale Funktion, d.h. p, q reelle Polynome
Speziell:

$$\int \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = -1 + \frac{2}{1-t^2} \qquad \text{(Division mit Rest)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta}{1-t} = \frac{\alpha\cdot(1-t)+\beta\cdot(1+t)}{(1+t)\cdot(1-t)} = \frac{(\beta-\alpha)\cdot t + (\beta+\alpha)}{1-t^2}$$

OK für $\alpha = \beta = 1$
Also

$$\begin{aligned}\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int \left(-1 + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= -t + \log(1+t) - \log(1-t)\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\int \frac{p(t)}{q(t)}\mathrm{d}t$$

*1. Schritt:* Division mit Rest (Algebra)
Zu Polynomen $p, q$ (ber $\mathbb{R}$) existieren Polynome $h, r$ mit

$$p(t) = h(t)\cdot q(t) + r(t);\ \deg r < \deg q$$

Also $\int \frac{p}{q} = \int h + \int \frac{r}{q}$, also OE (r wird zu p): $\deg p < \deg q$

*2. Schritt:* Partialbruchzerlegung, für $\deg p < \deg q$
$q$ wird in Faktoren zu seinen verschiedenen reellen Nullstellen und den Paaren komplexer Nullstellen zerlegt:

$$q(t) = a\cdot\prod_{j=1}^{r}(t-a_j)^{m_j}\cdot\prod_{k=1}^{s}(t^2+b_kt+c_k)^{n_k}$$

Dann existieren eindeutige reelle $\alpha_{jj}, \beta_{kk}, \gamma_{kk}$ mit

$$\int\frac{p(t)}{q(t)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{j'=1}^{m_j}\int\frac{\alpha_{jj'}}{(t-a_j)^{j'}} + \sum_{k=1}^{s}\sum_{k'=1}^{n_k}\int\frac{\beta_{kk'}t+\gamma_{kk'}}{(t^2+b_kt+c_k)^{k'}}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten führt auf ein lineares Gleichungssystem für die $\alpha_{jj'}, \beta_{kk'}, \gamma_{kk'} \longrightarrow$ LinA I

$\int \frac{p(t)}{q(t)}$ ist also (ggf. nach $t = A\tau + b$) reduzierbar auf folgende Grundtypen:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \log x \\
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^m} &= \frac{1}{-m+1} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} \\
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} &= \arctan x = I_1(x) \\
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^m} &= I_m(x) \\
\int^x \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) \\
\int^x \frac{t}{(t^2+1)^m}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{m-1}(x) &= \int^x \frac{t^2+1}{(t^2+1)^m}\,\mathrm{d}t = I_m(x) + \int^x t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^m}\,\mathrm{d}t \\
&= I_m(x) - \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \cdot \underbrace{\int 1 \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{m-1}}}_{I_{m-1}(x)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I_m(x) = \frac{x}{2(m-1)(x^2+1)^{m-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(m-1)}\right) \cdot I_{m-1}(x)$$

(iv) Bestimmen von
$$\int R(\sin t, \cos t)\mathrm{d}t$$
für beliebige reelle rationale Funktionen $R$
*Trick:* substituiere $\tau = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\sin t = \sin\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tau}{1+\tau^2}
\end{aligned}$$

$$1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\cos t = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tau^2} - 1 = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{1+\tau^2}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \int R(\sin t, \cos t)\mathrm{d}t = \int \underbrace{R\left(\frac{2\tau}{1+\tau^2}, \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)}_{\text{rationale Funktionen}} \frac{1+\tau^2}{2}\,\mathrm{d}t$$

(v) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\ \mathrm{d}t = \int^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \log \varphi(x)$$

$$\tau = \varphi(t)$$
$$\mathrm{d}\tau = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

*3. Zur partiellen Integration*

(i)

$$\int^x \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log t}_{g} = \underbrace{t}_{f} \cdot \log t|^x - \int^x \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{g'}$$
$$= -x + x \cdot \log x$$

(ii)

$$\int^x 1 \cdot \arctan t = x \cdot \arctan x - \int^x \frac{t}{1+t^2}$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

(iii) $S_m(x) = \int\limits_0^x \sin^m t\ \mathrm{d}t$, $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = 1 - \cos x$. $m \geq 2$:

$$S_m(x) = \int \underbrace{\sin t}_{f'} \cdot \sin^{m-1} t\ \mathrm{d}t$$
$$= -\cos t \cdot \sin^{m-1} t|_0^x + (m-1) \cdot \int_0^x \cos^2 t \cdot \sin^{m-2} t\ \mathrm{d}t$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \cdot \int_0^x \left(1 - \sin^2 t\right) \cdot \sin^{m-2} t\ \mathrm{d}t$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \cdot S_{m-2}(x) - (m-1) \cdot S_m(x)$$
$$S_m(x) = \frac{m-1}{m} \cdot S_{m-2} - \frac{1}{m} \cdot \cos x \cdot \sin^{m-1}(x)$$

Insbesondere fr $x = \frac{\pi}{2}$, $\sigma_m := S_m(\frac{\pi}{2}) = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma_{m-2}$ die Rekursion:

$$\sigma_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \sigma_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\sigma_0}$$
$$\sigma_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \sigma_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{1}_{\sigma_1}$$

Monotonie: für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $s^1 \geq s^2 \geq \ldots \geq 0$, weil $0 \leq s = \sin x \leq 1$ also $S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq 0 \underset{x=\frac{\pi}{2}}{\Longrightarrow} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$

Vorlesung 28.04.09

Folglich haben wir

$$1 \geq \frac{\sigma_{2n+1}}{\sigma_{2n}} \underset{\text{monoton}}{\geq} \frac{\sigma_{2n+2}}{\sigma_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{2n+1}}{\sigma_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^2 \cdot (2n-2)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{(2n+1)(2n-1)\cdot(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1} \cdot \frac{1}{\pi/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} := \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}$$

[Wallis] (1616-1703)

(iv) Riemann-Lemma der Fourier-Reihen
Sei $f \in \mathcal{C}^1$.

Dann gilt: $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(\omega t)\ \mathrm{d}t = 0$

denn:

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_{g}\underbrace{\sin(\omega t)}_{f'}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\cdot f\right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{\omega}\underbrace{f'(t)\cos(\omega t)}_{\text{beschränkt}}\ \mathrm{d}t$$

$$\leq \left|\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\cdot f\right]_a^b\right| + \int_a^b |\frac{1}{\omega}f'(t)\cos(\omega t)|\ \mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{\mathrm{C}}{\omega} \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

## 4.5 Integrale von Riemann und Lebesgue

*Erinnerung:* Treppenfunktion $\varphi \in T$ zu Partition $P$

$$\int_a^b \varphi := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(a_k - a_{k-1})$$

$f \in R =$ Regelfunktionen $= \{f : [a,b] \to Z|$ einseitige Limites existieren$\}$

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \text{ für } \varphi_n \to f, \text{ gleichmäßig, sup-Norm.}$$

**Definition 4.17.** Für $Z = \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, definiere

***Ober-Integral*** $\displaystyle\int_a^{b^*} f := \inf\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in T, \varphi \geq f\right\}$

***Unterintegral*** $\displaystyle\int_{a_*}^{b} f := -\int_a^{b^*} (-f) := \sup\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in T, \varphi \leq f\right\}$

$f$ heißt ***Riemann-integrierbar***, falls $\displaystyle\int_a^{b^*} f = \int_{a_*}^{b} f =: \int_a^b f$ ***(Riemann-Integral)***

[Riemann] (1826-1866)
Habil 1854

**Definition 4.18.** $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt ***Lebesgue-Nullmenge***, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Intervalle $I_k$ existieren, die

a) die Menge $N$ überdecken: $N \subseteq \bigcup\limits_k I_k$ und

b) Gesamtlänge höchstens $\varepsilon$ haben:
$\sum\limits_k |I_k| \leq \varepsilon$

$|I_k| =$ Länge von $I_k, |[a,b]| = b - a$ alle $|I_k| > 0$

**Satz 4.19.** *(ohne Beweis) Es gilt Rie* $:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ *beschränkt, Riemann-integrierbar* $\} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ *beschränkt und stetig außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge* $\}$

*Bemerkung:*

(i) abzählbare Vereinigungen $N := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ von Nullmengen $N_k$ sind wieder welche,
denn: überdecke $N_k$ durch Intervalle $I_{k_j}$ der Gesamtlänge $\leq \varepsilon_k$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.

(ii) Sprechweise: wir sagen „gilt fast überall" (f.ü., a.e. = almost everywhere) wenn etwas außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge gilt,
z.B. $f = g$ f.ü., $f \leq g$ f.ü., $\lim f_n = g$ f.ü., ...

(iii) $R \subsetneqq Rie$, natürlich mit dem gleichen Integral auf $R$. Allerdings nur für $Z = \mathbb{R}$, eventuell $\mathbb{R}^n$.
Denn: $Rie \neq R$, wähle

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \qquad \text{auf } x \in [-1,1]$$

Unstetig nur in 0 (Nullmenge! abzählbare Mengen sind auch Nullmengen, $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge), also $f \in Rie$. Aber $f$ ohne einseitigen Limes $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$, also $f \notin R$.

**Satz 4.20.** *(ohne Beweis) Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar und* $P_n$ $[a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}]$ *eine Folge von Partitionen zu* $[a,b]$ *mit Korn* $\eta(P_n) := \max\limits_{1 \leq k \leq n} (a_{n,k} - a_{n,k-1}) \to 0$.
*Dann gilt für jede beliebig gewählte Folge von* $\xi_{n,k} \in [a_{n,k-1}, a_{n,k}]$ *dass der Limes*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) = \int_a^b f$$

*existiert und unabhängig von der Wahl der* $P_n, \xi_{n,k}$ *gleich dem Riemann-Integral ist.*

**Korollar 4.21.** *Sei* $f, g \in Rie([a,b], \mathbb{R})$*, beschränkt*

*(i) Wenn* $f = g$ *f.ü., dann* $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f$

*(ii) Wenn* $f = g$ *auf dichter Teilmenge von* $[a,b]$*, dann* $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f$

**Beweis:** (ii) Wähle die $\xi_{n,k}$ in der dichten Menge. ✓

(i) $f = g$ f.ü $\Rightarrow f = g$ auf dichter Menge. Sonst enthielte nämlich die Menge wo $f \neq g$ ein nichtleeres Intervall $(\alpha, \beta)$, wäre also keine Nullmenge.

$\square$

Leider ist die Dirichlet-Funktion

$$1_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textit{nicht} \text{ in } \textit{Rie}$$

Da sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht sind, würde $1_{\mathbb{Q}} \in \textit{Rie}$ wegen Korollar 4.21 nach sich ziehen, dass $\int\limits_0^1 1_{\mathbb{Q}} \underset{\mathbb{Q}\text{ dicht}}{=} \int\limits_0^1 1 = 1$ und zugleich $\int\limits_0^1 1_{\mathbb{Q}} \underset{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}{=} \int\limits_0^1 0 = 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch !
Also $1_{\mathbb{Q}} \notin \textit{Rie}$.

**Definition 4.22.** [Lebesgue] (1865-1941) (1901)

$$\text{Setze } \mathfrak{H}^u := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{existiert } T \ni \varphi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f, \text{ f.ü.} \right\}$$

d.h. für fast alle $x$ gilt: $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \ldots \nearrow f(x)$

$$\mathfrak{H}^o := \left\{ f \mid \text{ex. } T \ni \varphi_n \underset{n\to\infty}{\searrow} f, \text{f.ü.} \right\} = -\mathfrak{H}^u$$

Definiere: $\int\limits_a^b f := \lim \int\limits_a^b \varphi_n \in \mathbb{R}$ für diese Folgen.

***Lebesgue-Oberintegral***: $\mathfrak{L}\text{-}\int\limits_a^{b^*} f := \inf \left\{ \int\limits_a^b h \mid h \in \mathfrak{H}^u, h \geq f \right\} \leq +\infty$

***Lebesgue-Unterintegral***: $\mathfrak{L}\text{-}\int\limits_{a_*}^{b} f := \sup \left\{ \int\limits_a^b h \mid h \in \mathfrak{H}^o, h \leq f \right\} \geq -\infty$

***Lebesgue-Integral***: $\int\limits_a^b f := \int\limits_{a_*}^{b} f = \int\limits_a^{b^*} f$ falls Ober- und Unter-Integral übereinstimmen.

*Bemerkung:* Vorlesung 30.04.09

(i)

$$R \subsetneq \textit{Rie} \subsetneq \mathfrak{L}$$
$$\textit{Rie} \subset \mathfrak{L}, \text{ weil } T \subseteq \mathfrak{H}^o \cap \mathfrak{H}^u$$
$$\textit{Rie} \neq \mathfrak{L}, \text{ weil } 1_{\mathbb{Q}} \in \mathfrak{L} \setminus \textit{Rie}$$

Dirichlet-Funktion:
$\mathfrak{L}\text{-}\int\limits_a^b 1_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{L}\text{-}\int\limits_a^b 0 = 0$, weil f beim Integral auf Nullmenge abgeändert werden darf, etwa $1_{\mathbb{Q}}$ zu 0, auf $\mathbb{Q}$.

(ii) Als ***Lebesgue-Maß*** $\lambda(A)$ einer Menge $A \in [a,b]$ bezeichnet man (falls existent) $\lambda(A) := \int\limits_a^b 1_A$, wobei für die Indikatorfunktion gilt:

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*NB:* $\lambda(N) = 0$ für Lebesgue-Nullmenge

(iii) Es gibt beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-integrierbar sind. Deren Konstruktion benötigt stets das Auswahlaxiom. Bsp.: [Walter] „Analysis II“ $\longrightarrow$ Banach-Tarski-Paradoxon

Vorteil des Lebesgue-Integrals: traumhafte Konvergenzsätze

**Satz 4.23.** *[Beppo Levi] (1875-1961)*
*Sei $\mathfrak{L} \ni f_n \nearrow f$, f.ü. mit $\int\limits_a^b f_n$ beschränkt. Dann folgt $f \in \mathfrak{L}$ und*

$$\mathfrak{L}\text{–}\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \mathfrak{L}\text{–}\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}\text{–}\int_a^b f_n \qquad \textit{(monotone Konvergenz)}$$

**Satz 4.24** (Lebesgue-dominierte Konvergenz, DCT)**.** *Sei $\mathfrak{L} \ni f_n \to f$, f.ü. und $g \geq |f|$ mit $g \in \mathfrak{L}$ (integrierbare Majorante). Dann folgt $f \in \mathfrak{L}$ und*

$$\mathfrak{L}\text{–}\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \mathfrak{L}\text{–}\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}\text{–}\int_a^b f_n$$

Wir betrachten $\mathfrak{L}^p := \{f \in \mathfrak{L} \mid |f|^p \in \mathfrak{L}\}$, $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{für } f \in \mathfrak{L}^p$$

$L^p := \mathfrak{L}^p/_{=\text{ f.ü.}}$, d.h. in $L^p$ werden $f$ und $g$ als gleich betrachtet, wenn $f = g$ f.ü.

**Lemma 4.25.**

*(i) Für $f \in \mathfrak{L}^p$, $g \in \mathfrak{L}^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$ gilt*

$$\int_a^b f \cdot g \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \qquad \textit{(Hölder-Ungleichung)}$$

*(ii) Für $f, g \in \mathfrak{L}^p$, $1 \leq p < \infty$ gilt $f + g \in \mathfrak{L}^p$ und*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \textit{(Minkowski, Dreiecksungleichung)}$$

**Beweis:** Regelfunktionen, Lebesgue ad libitum

(i)

$$\int_a^b f+g \underset{Partition}{=} \sum_{k=1}^n f_k \cdot g_k \cdot (a_k - a_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^n \underbrace{f_k \cdot (a_k - a_{k-1})^{\frac{1}{p}}}_{\alpha_k} \cdot \underbrace{g_k \cdot (a_k - a_{k-1})^{\frac{1}{q}}}_{\beta_k}$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^p \cdot (a_k - a_{k-1})^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |g_k|^q \cdot (a_k - a_{k-1})^{\frac{q}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) $p = 1$ trivial, betrachte $p > 1$

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f+g|^p = \int_a^b |f+g| \cdot |f+g|^{p-1}$$
$$\le \int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$
$$\le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b \left(|f+g|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|f\|_p \cdot \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} + \|g\|_p \cdot \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}}$$
$$= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left\|f+g\right\|_p^{\frac{p}{q}}$$
$$\Rightarrow \left\|f+g\right\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p$$ □

**Satz 4.26.** *(ohne Beweis) $L^p$ (mit f.ü.) ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum.*

*Bemerkung:*

(i) Wir haben jetzt, z.B. in $L^1$, viel stärkere Konvergenzsätze als für Regelfunktionen:
in $R$ vertauscht Integral mit Konvergenz bezüglich sup-Norm
in $L$ vertauscht Integral mit Konvergenz bezüglich p-Norm $\|\cdot\|_p$

(ii) Wir hätten auch $T$, etwa bezüglich $\|\cdot\|_1$, abstrakt „vervollständigen" können. Dann wäre aber nicht klar, in welchem Sinne $f \in L^p$ eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist.

(iii) Spezialfall: $p = 2$. Dann haben wir den Banachraum $L^2$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_a^b f \cdot g$ und Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ für $f, g \in L^2$ (d.h. Hilbertraum).
Hölder = CSU: $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

## 4.6 Mittelwertsätze und Taylorformel

Vorlesung 05.05.09

Taylorentwicklung

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{(T_n f)(x),\ \text{n-tes Talor Polynom}} + (R_n f)(x)$$

**Satz 4.27.** *Sei $f : [a,b] \to Z$, $\mathcal{C}^{n+1}$. Dann gilt die folgende Darstellung des Restgliedes:*

$$(R_n f)(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

*N.B.:* früher war $(R_n f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$,
[L.J. Lagrange] (1736-1813)

**Beweis:** Induktion nach $n$

$n = 0:$
$$f(x) \overset{!}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\ \mathrm{d}t, \text{ Fundamentalsatz 4.11 (S. 10)}$$

$n-1 \to n:$
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{diff.} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{intg.}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} n(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + (R_{n-1} f)(x) \\
&\underset{\text{I.A.}}{=} f(x) - (T_n f)(x).
\end{aligned}$$

□

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung geht so:

**Satz 4.28.** $g, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Seien $g, \varphi$ integrierbar, $|g|$ beschränkt, $\varphi \geq 0$ (und $g \cdot \varphi$ integrierbar). Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$, mit $\inf g \leq \mu \leq \sup g$, so dass $\int_a^b g\,\varphi = \mu \cdot \int_a^b \varphi$.*

**Beweis:**

$$\begin{array}{rclcl}
\inf g & \leq & g & \leq & \sup g \\
(\inf g) \cdot \varphi & \leq & g \cdot \varphi & \leq & (\sup g) \cdot \varphi \\
\int_a^b (\inf g) \cdot \varphi & \leq & \int_a^b g \cdot \varphi & \leq & \int_a^b (\sup g) \cdot \varphi
\end{array}$$

□

*Bemerkung:*

(i) Für das Restglied $R_n$ der Taylorentwicklung erhalten wir also

$$(R_n f)(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!} \underbrace{(x-t)^n}_{\varphi} \quad \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{g \text{ stetig, also beschränkt}} \, \mathrm{d}t$$

$$= \mu \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi = \mu \cdot \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

und $g$ stetig nimmt den Zwischenwert $\mu$ an, etwa an der Stelle $\xi$.
Also:

$$(R_n f)(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \qquad \text{(Lagrange)}$$

(ii) $\varphi \equiv 1$. Dann gilt

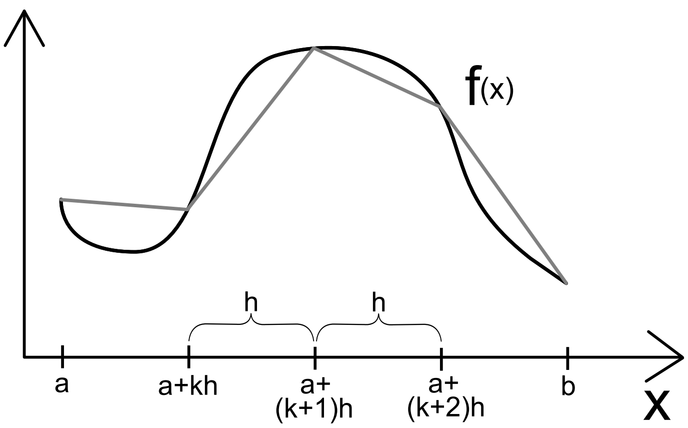
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{(Mittelwert von g)}$$

(iii) Sei $\int_a^b \varphi > 0$. Dann gilt

$$\mu = \frac{\int_a^b (g\,\varphi)}{\int_a^b \varphi} = \int_a^b \left( g \cdot \left( \frac{\varphi}{\int_a^b \varphi} \right) \right)$$

mit $\varphi$ gewichtetes Mittel.

**Satz 4.29** (Trapezformel)**.** *Sei* $f : [a,b] \to$ *Banach*, $\mathcal{C}^2$, $\quad h := \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$




$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left( f(a+kh) + f(a+(k+1)h) \right) h + R$$

*mit* $|R| \leq \dfrac{b-a}{12} \sup\limits_{[a,b]} \left| f'' \right| \cdot h^2$

**Lemma 4.30.** *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$. Dann gilt*

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{12} f''(\xi)$$

*für geeignetes $\xi \in [0,1]$.*

**Beweis:** (mieser kleiner Trick)
Wähle $\varphi(t) := \frac{1}{2}t(1-t) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(1) = 0$, Parabel,
$\varphi'(t) = \frac{1}{2} - t, \quad \varphi''(t) \equiv -1.$

$$\begin{aligned}
\text{Also gilt: } \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \quad &= -\int_0^1 f(t)\,\varphi''(t)\ \mathrm{d}t \qquad &&= -\left[f\,\varphi'\right]_0^1 + \int_0^1 f'\varphi' \\
&= +\frac{1}{2}(f(1)+f(0)) &&+ \cancel{\left[f'\varphi\right]_0^1} - \int_0^1 f''(t)\,\varphi(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) &&- f''(\xi)\cdot \underbrace{\int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t}_{=\frac{1}{12}}
\end{aligned}$$

□

**Beweis (Trapez):**
Additivität des Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^h f(a+kh+t)\ \mathrm{d}t \\
&\underset{t=h\tau}{=} \quad \sum_{k=0}^{n-1} h \underbrace{\int_0^1 f(a+kh+h\tau)\ \mathrm{d}\tau}_{\text{Lemma für } f(\cdots+h\tau)} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\Big(f(a+kh) + f(a+(k+1)h)\Big)h - h\cdot\frac{1}{12} f''(\xi_k)\cdot h^2
\end{aligned}$$

Also gilt für den Fehler $R$:

$$|R| \leq \frac{1}{12}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|f''(\xi_k)\right| \cdot \underbrace{h}_{\frac{b-a}{n}}\right)\cdot h^2 \leq \frac{1}{12}\sup\left|f''\right|\cdot(b-a)\cdot\cancel{\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\right)}\cdot h^2$$

□

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist für $f : [a,b] \to Z$, Banach oder $\mathbb{R}^n$ im allgemeinen falsch. Es gilt aber der wichtige Schrankensatz:

**Satz 4.31** (Schrankensatz)**.** *Sei $f \in \mathcal{C}^1([a,b], Z)$. Dann gilt:*

$$|f(b) - f(a)| \leq \underbrace{\Big(\sup_{\xi\in[a,b]} \big|f'(\xi)\big|\Big) \cdot (b-a)}_{obere\ Schranke}$$

**Beweis:**

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \underbrace{1}_{\varphi} \cdot \big|f'(t)\big|\ \mathrm{d}t \underset{\substack{\text{MWS}\\ \text{Integralrechnung}}}{\leq} (\sup \big|f'\big|) \cdot (b-a)$$

□

*N.B.:* Trapezformel auch mit $f \in Z$.

## 4.7 Uneigentliche Integrale

**Definition 4.32.** Wenn der folgende Limes existiert:

$$\int_a^b f := \lim_{\substack{\tilde{a}\searrow a\\ \tilde{b}\nearrow b}} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f$$

nennen wir ihn ***uneigentliches Integral***. Dabei muss $f : (a,b) \to Banach$ nur auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a,b)$ integrierbar sein. Der Limes darf nicht von der Wahl der Folgen $\tilde{a}, \tilde{b}$ abhängen.

**Beispiel.**

(i)

$$\int_0^1 t^\alpha\ \mathrm{d}t \Rightarrow \lim_{\tilde{a}\to 0} \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}\right]_{\tilde{a}}^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

für $\alpha + 1 > 0$ d.h. $\alpha > -1$

(ii)

$$\int_1^\infty t^\alpha\ \mathrm{d}t = \lim_{\tilde{b}\to\infty} \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}\right]_1^{\tilde{b}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

für $\alpha + 1 < 0$ d.h. $\alpha < -1$

(iii)

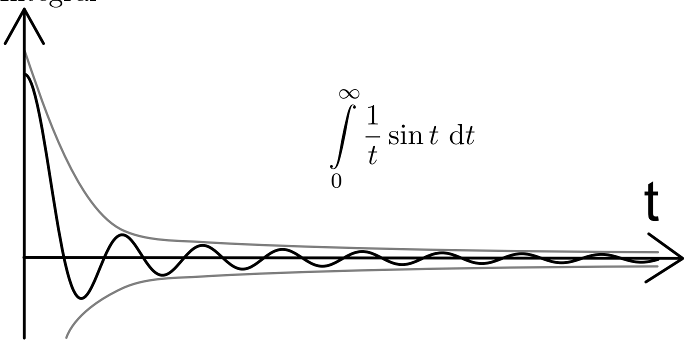
$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = \lim_{\tilde{a}\searrow 0} \int_{\tilde{a}}^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$$

Cauchykriterium: $0 < \tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$

$$\left|\int_{\tilde{a}_1}^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t - \int_{\tilde{a}_2}^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_{\tilde{a}_1}^{\tilde{a}_2} \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|\ \mathrm{d}t \leq |\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2|$$

Also existiert das uneigentliche Integral.
Generell konvergiert $\int\limits_a^b f$ uneigentlich, falls $\int\limits_a^b |f| < \infty$. Solche Integrale nennt man auch *absolut konvergent*.

(iv) Dirichlet-Integral



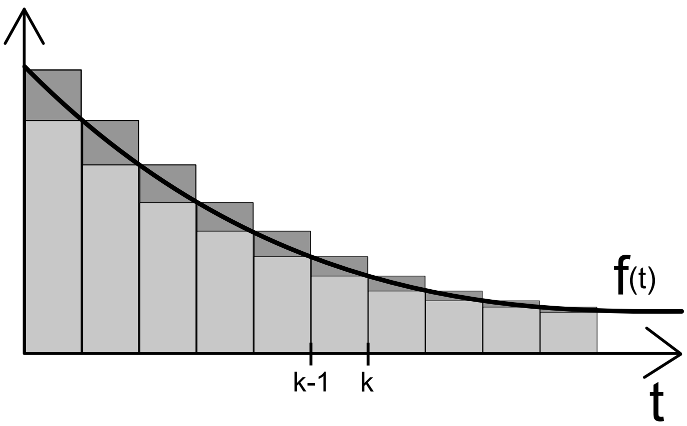

uneigentlich konvergent, aber nicht absolut konvergent

*Integration und Summation* Vorlesung 07.05.09

**Satz 4.33.** *Sei $f \geq 0$ monoton fallend, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_k := f(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ absolut konvergent } \Leftrightarrow \int\limits_0^\infty f(t) \, \mathrm{d}t \text{ uneigentlich, (absolut) konvergent}$$

**Beweis:**




$$\int\limits_1^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k \leq \int\limits_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Partialsummen bzw. $\int^n f$ beschränken einander. □

**Beispiel.** die Γ-Funktion

$$\Gamma(\alpha) := \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t \qquad , \alpha > 0$$

absolut konvergentes uneigentliches Integral:

(i) $\int\limits_1^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ konvergiert, weil $C > 0$ existiert:

$$\left|t^{\alpha-1}e^{-t}\right| \leq C \cdot e^{-\frac{t}{2}} \qquad \text{für alle } t \geq 1$$

(ii) $\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ konvergiert, weil:

$$\left|t^{\alpha-1}e^{-t}\right| \leq t^{\alpha-1} \qquad \text{für } 0 < t \leq t$$

Durch partielle Integration (zunächst für $\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}$, dann mit $\tilde{a} \searrow 0$, $\tilde{b} \nearrow \infty$) folgt

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^{\alpha}e^{-t}\right]_0^\infty + \alpha \cdot \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \alpha \cdot \Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\forall \alpha > 0) \quad \Gamma(\alpha+1) &= \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\
&= \Gamma(1) = 1 \\
\Rightarrow &= \Gamma(n+1) = n! \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right)!
\end{aligned}$$

**Satz 4.34.** *(Beweis: Forster) Es gibt genau eine Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$, die $(*)$ erfüllt, so dass zusätzlich $\log\Gamma$ konvex ist.*

**Satz 4.35** (Stirling-Formel)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \qquad \textit{für } n \to \infty, \textit{ d.h.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1$$

*Genauer gilt*

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{1}{12(n-1)}}$$

*(d.h. $n!$ wird durch rechte Seite mit relativem Fehler $\approx \frac{1}{12(n-1)}$ angenähert: $1\%$ für $n = 10$)*
*[Stirling] (1692-1770) 1730*
*[de Moivre] (1667-1754) 1730*

**Beweis:**

$$\int_1^n \log t \ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log t \ \mathrm{d}t \underset{\text{Trapez-Lemma}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\log(k) + \log(k+1)) - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{\xi_k^2}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \log k\right)}_{\log(n!)} - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{-\frac{1}{\xi_k^2}}_{\log''(\xi_k)}$$

$$\int_1^n \log t \ \mathrm{d}t = [t \cdot \log t - t]_1^n$$

$$= n \cdot \log n - n + 1$$

Also

$$\log(n!) = \log\Big(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \overbrace{\exp\Big(1 - \frac{1}{12} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k^2}}_{\leq \sum \frac{1}{k^2}}\Big)}^{c_n}\Big)$$

Zu zeigen ist nun:

$$c_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \overset{!}{\to} \sqrt{2\pi}$$

$$\sqrt{2\pi} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}}$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \sqrt{2n+1}}$$

Mit $c := \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} c_n$ gilt weiterhin:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \frac{c^2}{c} = c$$

Zeige also, dass:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \sqrt{2\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n} \cdot \sqrt{2\pi}} = 1$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n} \cdot \sqrt{2\pi}} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} \cdot n^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n} \cdot (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)) \cdot \sqrt{2n+1}}{n^{2n+1} e^{-2n} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n)) \cdot 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n))}_{2^n \cdot n!}}$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n+1}}{n \cdot 2} = 1$$

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} c_n = \exp\left(1 - \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^2}\right) = c_n \cdot \exp\left(-\frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^2}\right)$$

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! = c_n \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12(n-1)}}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}$$

□

früher:

$$n^n e^{-(n-1)} < n! < n^{n+1} e^{-(n-1)}$$

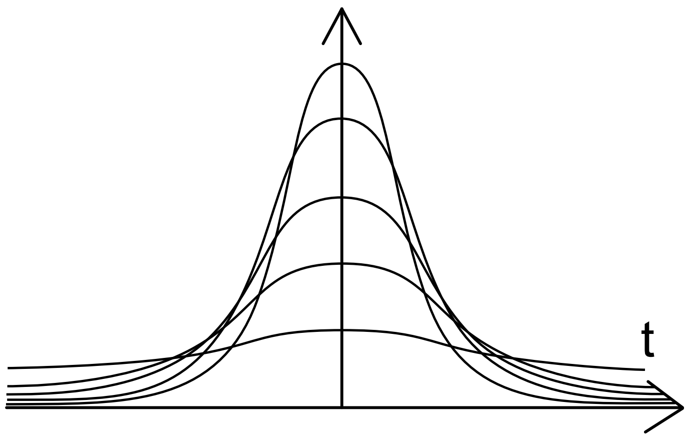
## 4.8 Dirac-Folgen

**Definition 4.36.** Eine Folge integrierbarer $\varphi_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (insbesondere $\varphi_n \geq 0$) heißt ***Dirac-Folge***, wenn gilt

(i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n = 1 \ (\forall n)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ : \ \int\limits_{|t| \geq \delta} \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t < \varepsilon$

*NB:* (zu (i)) Die Einheitsmasse der $\varphi(n)$ konzentriert sich also immer mehr bei Null.




**Beispiel.** (i) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig, $\varphi \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Dann ist

$$\varphi_n(t) := \underbrace{n}_{\text{streckt } \varphi} \cdot \varphi( \underbrace{n}_{\text{staucht } \varphi} t)$$

eine Dirac-Folge.
Tatsächlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot \varphi(nt) \, \mathrm{d}t = 1$$

und

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t \overset{nt=\tau}{=} \int_{-n\delta}^{n\delta} \varphi_(\tau) \, \mathrm{d}\tau \geq 1 - \varepsilon$$

weil $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\ \mathrm{d}\tau = 1$ uneigentlich konvergent. Folglich

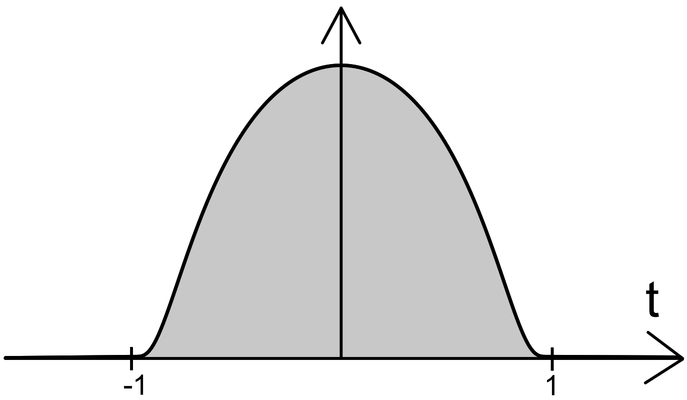
$$\int\limits_{|t|\geq\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t - \int\limits_{|t|\leq\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \leq 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon$$

Zum Bsp. kann $\varphi$ sogar analytisch sein:

$$\varphi(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Oder $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ aber nur auf $[-1;1]$ ungleich Null ($\mathcal{C}^\infty$-Hut)

$$\varphi(t) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases} \quad \text{für geeignetes } c > 0$$




$\varphi_n(t) := c_n \cdot ((1-t^2)_+)^n$, wobei

$$\xi_+ := \begin{cases} \xi & \text{für } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

den positiven Anteil von $\xi$ bezeichnet

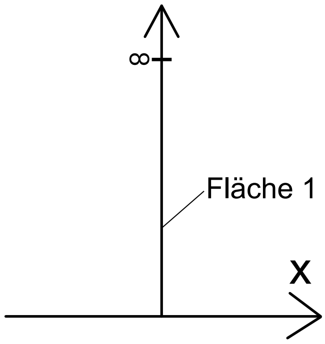
Vorlesung 12.05.2009

**Satz 4.37.** *Sei $\varphi_n$ Dirac-Folge, $f \in \mathcal{BC}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann gilt für die Faltungen*

$$\begin{aligned} f_n(x) := (\varphi_n * f)(x) &:= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y) f(y)\ \mathrm{d}y \\ &\overset{!}{=} (f * \varphi_n)(x) \end{aligned}$$

*auch $f_n \in \mathcal{BC}^0$ (Übung!) und vor allem:*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \textit{ gleichmäßig auf beschränkten } x\textit{-Intervallen}$$




Sprechweise: $\varphi_n \to \delta_0$, Dirac-„Funktion“

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x-y) f(y)\ \mathrm{d}y$$

besser: $\delta_0$ ***Dirac-Distribution*** oder ***Dirac-Maß***

**Beweis:**

$$\begin{aligned} (g*f)(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\underbrace{x-y}_{=y'}) f(y)\ \mathrm{d}y & \qquad x - y' = y \\ &= -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x-y') g(y')\ \mathrm{d}y' & \qquad = (f*g)(x) \end{aligned}$$

Und jetzt wird abgeschätzt mit $|f| \le M \in \mathbb{R}$ und gleichmäßiger Stetigkeit
($|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ (auf beschränkten Intervallen) ) und miesem Trick:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\underset{\frac{1}{2}mT}{=} |(f*\varphi_n)(x) - f(x)| \\ &\underset{+\frac{1}{2}mT}{=} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x-y) - f(x)\big)\varphi_n(y)\ \mathrm{d}y \right| \\ &\le \int\limits_{|y|\ge\delta} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\le 2M} \varphi_n(y)\ \mathrm{d}y \qquad + \int\limits_{|y|\le\delta} |f(x-y) - f(x)|\, \varphi_n(y)\ \mathrm{d}y \\ &\underset{n\ge n_0}{\le} \underbrace{2M\varepsilon}_{(ii)} \qquad\qquad + \varepsilon \cancel{\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n} \le (2M+1)\varepsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

**Satz 4.38** (Approximationssatz von *Weierstrass* (1815-1897)).
*Sei $[a,b]$ beschränktes Intervall.*
*Dann gilt: Die Polynome sind dicht in $(\mathcal{B})\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, d.h.: jede stetige Funktion auf $(a,b)$ ist beliebig genau und gleichmäßig auf $[a,b]$ durch Polynome approximierbar.*

**Beweis:** Ohne Einschränkung: $a = 0,\ b = 1$.
Sonst betrachte $\tilde{f}(\tau) := f\,\underbrace{((1-\tau)a + \tau b)}_{t},\ 0 \le \tau \le 1$
Ohne Einschränkung: $f(0) = f(1) = 0$.
Sonst betrachte $\tilde{f}(t) := f(t) - ((1-t)f(0) + tf(1))$
Setze $f(t)$ fort durch $f(t) := 0$ für $t \notin (0,1)$; dann $f \in \mathcal{BC}^0$. Und jetzt wird gefaltet mit Landau-Ketten:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(t) &:= \left(1-t^2\right)_+^n \\
f_n(t) &:= (f * \varphi_n)(x) \\
&= \int_{\cancel{\mathbb{R}}\,0}^{1} \left(1-(x-t)^2\right)_+^n f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(1-(x-t)^2\right)^n f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (\text{Polynom vom Grad } \leq 2n)
\end{aligned}
$$

und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$ nach vorherigem Satz. $\square$

## 4.9 Fourier-Reihen

[Lang], [Forster], [Heuser II]
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-periodisch, d.h. $f(t+2\pi) = f(t) \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$
[Fourier] (1768-1830) hatte folgendes Ziel:
schreibe $f$ als Summe

$$
f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot \underbrace{e^{ikt}}_{\cos kt + i \sin kt}
$$

mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$.
Wir betrachten $f \in \tilde{L}^2 := \left\{ f \mid 2\pi\text{-periodisch}, \ f|_{[0,2\pi]} \in L^2\left([0,2\pi],\mathbb{C}\right)\right\}$
Auf $\tilde{L}^2$ haben wir das (hermitesche) Skalarprodukt

$$
\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\ \mathrm{d}t
$$

und Norm

$$
\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f\rangle}
$$

Dadurch wird $\tilde{L}^2$ zu einem Hilbert-Raum.

**Lemma 4.39** (1)**.** *Sei $e_k(t) := e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$.*

*(i)* *Orthogonalitäts-Relationen*

$$
\langle e_k, e_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t}\ \mathrm{d}t = \delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}
$$

*Insbesondere sind die $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS in $\tilde{L}^2$.*

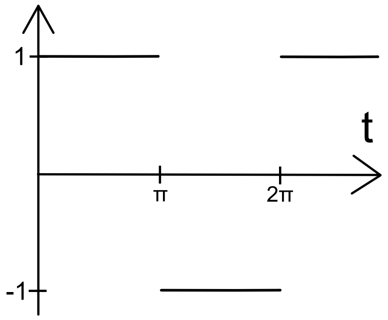
*(ii)* *Sei $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$ mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$*
*Dann gilt:*

$$
c_k = \langle e_k, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\ \mathrm{d}t \qquad (\forall k \in \mathbb{Z})
$$

*und $f \in \tilde{L}^2$ mit $\|f\|_{L^2}^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$.*

*Die $c_k$ heißen* **Fourier-Koeffizienten** *von $f$.*

**Beispiel** (Rechteck-Schwingung)**.**




$$f(t) := \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$2\pi$ − periodisch fortgesetzt

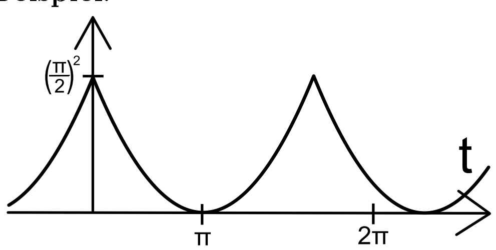
$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int\limits_0^{\pi} e^{-ikt} \, \mathrm{d}t - \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-ikt} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int\limits_0^{\pi} e^{-ikt} \, \mathrm{d}t - (-1)^k \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-ik(t-\pi)} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(1 - (-1)^k\right) \left[ -\frac{1}{ik} e^{-ikt} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi i k} \left(1 - (-1)^k\right)^2 = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade } (k = 0 \text{ auch!}) \\ \frac{2}{\pi i k} & k \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir vermuten und hoffen also (per Lemmata):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2}{\pi i k} \left( e^{+ikt} - e^{-ikt} \right) \\
&= + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin kt
\end{aligned}$$

Vorlesung 14.05.2009

**Beispiel.**




$f(t) := \frac{1}{4}(t - \pi)^2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
periodisch fortsetzen

Fourier-Reihe zu $f$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(t-\pi)^2 e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2k^2}$$
$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(t-\pi)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$$

Also konvergiert die Fourier-Reihe

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kt)$$

absolut und gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$.

Frage: $f(t) \equiv \tilde{f}(t)$ ?
*1. Antwort:* für *stetige* $f$ ist das ein allgemeiner Satz
*2. Antwort:* für *unser* $f$ rechnen wir es aus

Falls tatsächlich $f \equiv \tilde{f}$, dann folgt

<u>mit $t = 0$</u>: $\frac{1}{4}\pi^2 = f(0) = \tilde{f}(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, also

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riemannsche $\zeta$-Funktion: $\zeta(s) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$

<u>mit $t = \pi$</u>: $0 = f(\pi) = \tilde{f}(\pi) = \frac{\pi^2}{12} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Um zu zeigen, dass $f(t) \equiv \tilde{f}(t)$ tricksen wir

$$\tilde{f}'(t) \stackrel{?}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kt)$$

Problem: harmonische Reihe, divergiert

heller Wahnsinn: nochmal differenzieren

$$\tilde{f}''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt)$$

aber: endliche Summen sind explizit bekannt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \Re \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{e^{it}}_{q})^k \\
&= \Re\ q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= \Re\ \frac{(e^{int}-1)e^{it} \cdot e^{-i\cdot\frac{t}{2}}}{(e^{it}-1)e^{-i\cdot\frac{t}{2}}} \\
&= \Re\ \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i\cdot\frac{t}{2}}}{2i\sin(\frac{t}{2})} \\
&= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t) - \sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \\
&= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Für beliebig kleine $\delta > 0$, $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ gilt also für die Partialsummen

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin(kt) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{t} \cos(kt)\ \mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_{\pi}^{t} \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \cdot \sin((n+\frac{1}{2})t)\ \mathrm{d}t}_{\mathcal{O}(\frac{1}{n})\longrightarrow 0} - \frac{1}{2}(t-\pi) \underset{\text{glm.!}}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}(t-\pi)
\end{aligned}$$

Also konvergiert $c_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos(kt) \longrightarrow \tilde{f}$ in $\mathcal{BC}^1$ (Banachraum!) und es gilt

$$\tilde{f}'(t) = -\frac{1}{2}(t-\pi) \qquad t \in [\delta, 2\pi - \delta]$$

Beide Seiten integrieren:

$$\tilde{f}(t) = f(t) + C$$

$t \in [\delta, 2\pi - \delta](\forall \delta) \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$
Was ist $C$? Mittelwert beider Seiten:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f} = \underbrace{(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f)}_{=:c_0} + C$$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow f \equiv \tilde{f}$

**Lemma 4.40** (2)**.** *Sei $f \in \tilde{L}^2$, d.h. $\|f\|_2^2 < \infty$. Definiere $c_k := \langle e_k, f\rangle$. Dann folgt $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|_2^2 < \infty$ und $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$.*

Betrachte den Hilbert-Raum

$$l^2 := \left\{ (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid c_k \in \mathbb{C},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}$$

Skalarprodukt ($\forall a, b \in l^2$)

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle_{l^2} &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \bar{a_k} b_k \\ \|c\|_{l^2}^2 &:= \langle c, c\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2\end{aligned}$$

**Satz 4.41.** *Die Abbildung $c : \tilde{L}^2 \to l^2$ mit $f \mapsto c(f) := (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ (wobei $c_k(f) := \langle e_k, f\rangle_{\tilde{L}^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$) ist ein linearer, beschränkter (also stetiger) und unitärer Isomorphismus, d.h.:*

*unitär:* $$\langle c(f), c(g)\rangle_{l^2} = \langle f, g\rangle_{\tilde{L}^2} \qquad (\forall f, g \in \tilde{L}^2)$$

*Isomorphismus: bijektiv mit linearer, beschränkter, stetiger und unitärer Umkehrung*

*Es gilt*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k \qquad (\forall f \in \tilde{L}^2)$$

*Umkehrung = Darstellung durch Fourier-Reihen*

**Beweis:**

(i) $f \mapsto c(f)$, $\|c(f)\|_{l^2} = \|f\|_{\tilde{L}^2}$
linear, beschränkt (also stetig), erhält Norm

(ii) *unitär:* abstrakter Unsinn, denn in jedem Hilbert-Raum mit ***hermiteschem Skalarprodukt*** $\langle x, y\rangle$ (d.h. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $\langle x, y\rangle$ beinahe linear, also $\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, y\rangle$ und $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$) gilt

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}_{2\cdot\Re\langle x,y\rangle}$$

$$\begin{aligned}\|x+iy\|^2 &= \langle x+iy, x+iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2i \cdot \Im\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Erhält also die lineare Abbildung die Norm, dann auch das Skalarprodukt.

(iii) *Isomorphismus:* Lemma 1

$\square$

Vorlesung 19.05.2009

**Lemma 4.42** (nochmal Lemma 1; Orthonormalsystem und Umkehrung)**.** *Sei $e_k(t) = e^{ikt} = \cos(kt) + i \cdot \sin(kt)$. Dann gilt*

*(i)*

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \quad \textit{(normiert)} \\ 0 & \textit{sonst} \quad \textit{(orthogonal)}\end{cases}$$

*(ii) Zu $c \in l^2$ ist $f_\infty = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \in \tilde{L}_2^2$ und $c_k = \langle e_k, f_\infty \rangle$, $\|f_\infty\|^2 = \|c\|^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$*

**Beweis:**

(i)

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} e^{ilt} \,\mathrm{d}t$$
$$= \begin{cases} k = l: & \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 1 \\ k \neq l: & \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(l-k)t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(l-k)} \left[ e^{i(l-k)t} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

(ii) $f_n := \sum\limits_{|k|\leq n} c_k e_k \in \tilde{L}^2$ ist Cauchy-Folge, denn (mit $m < n$):

$$\|f_n - f_m\|^2 = \left\| \sum_{m<|k|\leq n} c_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{m<|k|\leq n} c_k e_k, \sum_{m<|k|\leq n} c_k e_k \right\rangle$$
$$= \sum_{m<|k|\leq n} \sum_{m<|l|\leq n} \langle c_k e_k, c_l e_l \rangle = \sum_{m<|k|\leq n} |c_k|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

da $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$.

Wegen Vollständigkeit von $\tilde{L}^2$:

$$f_\infty := \lim_{\mathrm{n}\to\infty} f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$$
$$\|f_n\|^2 = \sum_{|k|\leq n} |c_k|^2$$
$$\|f_\infty\| \underset{\text{da Norm stetig}}{=} \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \|f_n\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2} = \|c\|$$

Cauchy-Schwarz: $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (hier: Hölder-Ungleichung mit $p = 2$)

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$
$$\int |f(t) \cdot g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \left( \int |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow$ Stetigkeit von $\langle \_, \_ \rangle$:

$$\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$$
$$|\langle f + h, g \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle h, g \rangle| \leq \|h\| \cdot \|g\|$$
$$\langle e_m, f_\infty \rangle = \left\langle e_m, \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_m, c_k e_k \rangle = c_m$$
$$\langle e_m, f_\infty \rangle = \left\langle e_m, \lim_{\mathrm{n}\to\infty} f_n \right\rangle \underset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \langle e_m, f_n \rangle = c_m$$

$\square$

**Lemma 4.43** (Lemma 2 nochmal; Isomorphismus). *Sei $f \in \tilde{L}^2$. Setze $c_k = \langle e_k, f\rangle$. Dann gilt:*

*(i)*

$$\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2}_{=\|c\|^2} = \|f\|^2 < \infty$$

*(ii)* $f_\infty := \sum_{|k|\leq n} c_k e_k \in \tilde{L}^2$*. Dann ist $f_\infty(t) = f(t)$ für alle $t \in [0, 2\pi]\backslash$Lebesgue-Nullmenge bzw.* $\|f_\infty - f\| = 0$.

**Beweis:**

$$f_n := \sum_{|k|\leq n} c_k e_k \in \tilde{L}^2$$

$f_n$ =orthogonale Projektion von $f$ auf $E_n = \operatorname{span}\{e_k \mid |k| \leq n\}$ denn

$$\forall\, |k| \leq n \ :\ \langle f - f_n, e_k\rangle = 0$$

$$\text{d.h.} \qquad f - f_n \perp E_n$$

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \|f\|^2 = \langle f, f\rangle &= \langle f - f_n + f_n, f - f_n + f_n\rangle \\
&= \|f - f_n\|^2 + \|f_n\|^2 + \underbrace{\langle f - f_n, f_n\rangle}_{0} + \underbrace{\langle f_n, f - f_n\rangle}_{0}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \sum_{|k|\leq n} |c_k|^2 = \|f_n\|^2 \leq \|f\|^2 \qquad \text{also } c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$$

$$\underset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \quad \in \tilde{L}^2$$

$$\langle\_,\_\rangle \text{ stetig } \overset{(*)}{\Longrightarrow} \|f\|^2 = \|f - f_\infty\|^2 + \|f_\infty\|^2$$

$$\|f\|^2 \geq \|f_\infty\|^2 \qquad\qquad \text{(Besselsche Ungleichung)}$$

Zeige also noch $\|f\| = \|f_\infty\|$.

*Plan:*

(i) spezielle Treppenstufe $\quad T_a = \mathcal{X}_{[0,a]} = 1_{[0,a]}$

(ii) allgemeine Treppenstufe $\quad T_{[\alpha,\beta]} = \mathcal{X}_{[\alpha,\beta]} = 1_{[\alpha,\beta]}$

(iii) Treppenfunktion

(vi) $f$

zu (vi): Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $T$, sodass: $\|T - f\|_{L^2} < \varepsilon$. $(L^2 = \overline{T}^{\|\cdot\|_{L^2}})$
$\|T - T_\infty\| = 0$ wegen (iii) und $T = T_\infty$.

$$
\begin{aligned}
\|f_\infty\| = \|T_\infty + f_\infty - T_\infty\| &\overset{\text{Dreieck}}{\geq} \|T_\infty\| - \|f_\infty - T_\infty\| \\
&\overset{\text{Lemma 1}}{=} \|T_\infty\| - \|(f-T)_\infty\| \\
&\overset{\text{Bessel}}{\geq} \|T\| - \|f - T\| \\
&\overset{\text{Dreieck}}{\geq} \|f\| - 2\|T - f\| \\
&\geq \|f\| - 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

Also $\|f\| - 2\varepsilon \leq \|f_\infty\| \leq \|f\|$ und mit $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt dann: $\|f\| = \|f_\infty\|$

zu (i):

$$
T_a(t) = 1_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad 0 \leq a \leq 2\pi
$$

$$
c_k(T_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_a(t) e^{-ikt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik}e^{-ikt}\right]_0^a \qquad k \neq 0
$$

$$
c_k(T_a) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i k}(1 - e^{-ika}) & k \neq 0 \\ \frac{a}{2\pi} & k = 0 \end{cases}
$$

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(ka)}{\pi^2 k^2}
$$

Wir wissen (Bsp.2): $\frac{1}{4}(\pi - t)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2}$. Also

$$
\begin{aligned}
\|c\|^2 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{1}{\pi^2}\sum \frac{1}{k^2}} - \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\left(\frac{1}{4}(\pi - a)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right)}_{\sum \frac{\cos(ka)}{k^2}} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi a}{2} + \frac{a^2}{4}\right) \\
&= \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int |T_a(t)|^2\ \mathrm{d}t = \|T_a\|^2
\end{aligned}
$$

zu (ii):

$$
1_{[\alpha,\beta]}(t) = T_{[0,\beta-\alpha]}(t + \alpha) \quad \text{genauso}
$$

zu (iii):

$$
T = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot 1_{[t_j, t_j+1]} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathcal{X}_j
$$

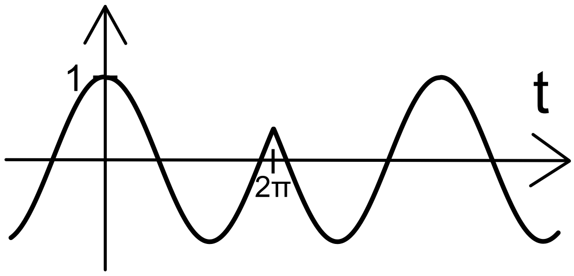
$$
\|T - T_\infty\| = \sum_{j=0}^{n-1} \|a_j(\mathcal{X}_j - (\mathcal{X}_j)_\infty)\| = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot \|\mathcal{X}_j - (\mathcal{X}_j)_\infty\| = 0
$$

$\square$

Vorlesung 26.05.2009

**Beispiel** (3)**.** Partialbruchzerlegung des Kotangens: $x \notin \mathbb{Z}$

$$f(t) := \cos(xt), |t| < \pi, 2\pi\text{-periodisch fortsetzen } (f \in \mathcal{C}^0)$$




$$\cos(xt) = \frac{1}{\pi}\sin(xt)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k}\frac{1}{x-k}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\pi \cdot \cot(\pi x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x+k} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big( \underbrace{\frac{2x}{x^2-k^2}}_{\substack{\text{absolut konvergent,}\\ \text{stetig in } x\notin\mathbb{Z}}} \Big)\end{aligned}$$

also $\quad \pi x \cot(\pi x) = 1 + 2 \cdot \sum_{k\geq 1} \frac{x^2}{x^2-k^2} = 1 + 2 \cdot \sum_k^\infty \frac{x^2}{k^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}}_{\substack{\text{geometrische Reihe}\\ \text{für } |x|<1}} = 1 - 2 \cdot \sum_{k,n>1} \frac{x^{2n}}{k^{2n}}$

$\underset{\substack{\text{abs. kvgt,}\\ \text{umordnen}}}{=} 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}}_{\zeta(2n)}\Bigg) x^{2n}\right)$ Potenzreihe in $x$

*Taylor-Reihen:*

$$x\cot(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n}$$

Wobei $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{B_n}_{\substack{\text{Bernoulli-}\\ \text{Zahlen}}} x^n$

$$\pi x \cot(\pi x) = \sum_{n=0} \infty \frac{2^{2n}}{(2n!)}(-1)^n B_{2n} \pi^{2n} x^{2n}$$

Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}, 0 < \zeta(2n) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{-2n} = \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \underbrace{(-1)^{n+1} B_{2n} \pi^{2n}} = |B_{2n}|$

z.B. $n = 1$: $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Asymptotik der Bernoulli-Zahlen für $n \to \infty$

$\zeta(2n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ Folglich $|B_{2n}| \sim \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \underset{Stirling}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\sqrt{2^{2n-1}}\pi^{2n}} = 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n}$ wächst abartig schnell ($n^{2n} = e^{2n\cdot\log(n)}$ super-exponentiell)

# 5 Metrische Räume

## 5.1 Metrik und Mengen

**Definition 5.1.** Eine Menge $E$ mit einer Abbildung $d : E \times E \to [0, \infty)$, heißt ***metrischer Raum*** $(E, d)$ mit ***Metrik*** (***Distanz, Abstand, Abstandsfunktion***) wenn gilt

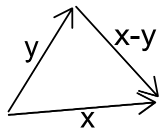
(i) ***symmetrisch:*** $d(x, y) = d(x, y)$

(ii) ***positiv:*** $d(x, y) \geq 0$
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) ***Dreiecksungleichung:*** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) (\forall x, y, z \in E)$

**Beispiel.**

(i) Jeder normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist metrischer Raum mit $d(x, y) := \|x - y\|$.




Etwa $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, L^p, \mathcal{BC}^0, \ldots$
auf $\mathbb{C}^N$ : $d(x, y) := \left( \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ , $p \geq 1$ ($p = 1$: Taxi-Metrik)
oder $d(x, y) := \max_k |x_k - y_k|$

(ii) Teilmengen $A$ metrischer Räume sind wieder welche, mit der selben Metrik $d$

(iii) endliche karthesische Produkte metrischer Räume sind wieder welche, z.B. mit Taxi-Metrik: $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ metrische Räume $\Longrightarrow (E_1 \times E_2, d)$ metrischer Raum, z.B. mit Taxi-Metrik

$$d\left((x_1, y_1), (x_2 - y_2)\right) := d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) \qquad x_i \in E_1, y_i \in E_2$$

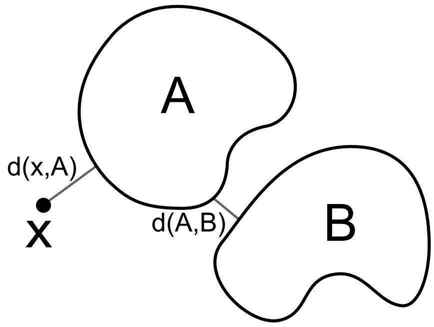
(iv) Jede Menge $E$ ist metrischer Raum, bezüglich der diskreten Metrik

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

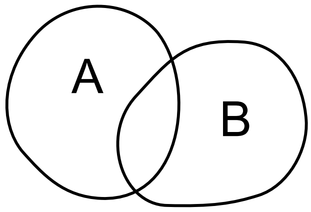
(v) Sei $A$ beliebige Menge, $(E', d')$ metrischer Raum, $y_0 \in E'$ $\quad B(A, E') := \{f : A \to E' \mid f \text{ beschränkt}\}$
(dabei heißt $f$ beschränkt, wenn $\sup_{a \in A} d(f(a), y_0) < \infty$)
$E$ ist metrischer Raum bezüglich der Metrik

$$d(f, g) := \sup_{a \in A} d'\left(f(a), g(a)\right)$$

*Bemerkung:* Metriken als Abstände beliebiger Elemente, erlauben es auch über Abstände von Mengen zu reden: (stets Teilmenge von $E, (E,d)$ metrisch)

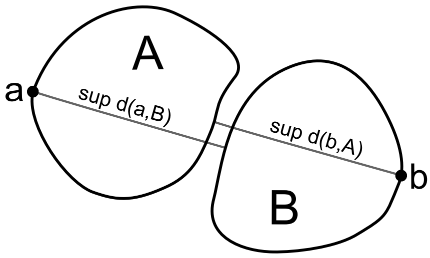



$$d(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a)$$
$$d(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a,b)$$




Da aber $A\cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$ ist dies keine Metrik auf Teilmengen!

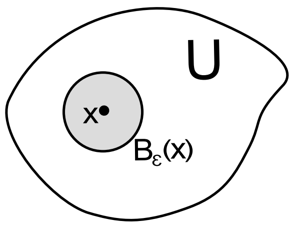
***symmetrischer Hausdorffabstand*** zweier Mengen




$$d_H(A,B) := \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

**Definition 5.2.** Stets $(E,d)$ metrischer Raum

(i) Wir nennen $B_r(x) := \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$ ***offene Kugel*** (Ball) mit Radius $r$. ***Abgeschlossene Kugel:*** $\overline{B_r}(x) := \{y \in E \mid d(x,y) \leq r\}$. Wir nennen $U \in E$ ***Umgebung*** von $x \in E$, falls $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.



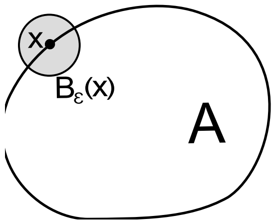

(ii) Wir nennen $A \subset E$ ***offen*** in $E$ wenn $A$ Umgebung jedes seiner Punkte $a$ ist, das heißt für jedes $a \in A$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\underbrace{B_\varepsilon(a)}_{\varepsilon\text{-Kugel in } E} \subseteq A$.

(iii) Wir nennen $A \subseteq E$ ***abgeschlossen*** in $E$, wenn $E \setminus A$ offen ist in $E$.

(iv) Der ***Abschluss*** $\bar{A}$ von $A \subseteq E$ ist

Vorlesung 28.05.2009

$$\bar{A} := \{x \in E \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing \text{ für jedes } \varepsilon > 0\} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$$




Das ***Innere*** $\mathring{A}$ von $A$ ist

$$\mathring{A} := \{x \in A \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subseteq A\} = \{x \in A \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$$

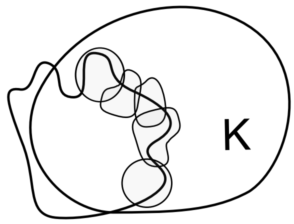
Der ***Rand*** $\delta A$ von $A$ ist $\delta A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$

(v) Eine Teilmenge $A$ von $E$ heißt ***dicht in*** $E$, wenn $\bar{A} = E$.
Eine Teilmenge $A$ von $B \subseteq E$ heißt ***dicht in*** $B$, wenn $\bar{A} \supseteq B$.

(vi) $C \subseteq E$ heißt ***zusammenhängend***, wenn für beliebige disjunkte Überdeckungen von $C$ durch in $C$ offenen Mengen $A$, $B$ gilt: $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$. Also nochmal:

$$A, B \text{ offen in } C, \quad A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = C \quad \Longrightarrow \quad A = \varnothing \text{ oder } B = \varnothing$$

(vii) $K \subseteq E$ heißt ***kompakt***, wenn jede Überdeckung $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i^{\text{offen}}$ durch (endlich, abzählbar oder überabzählbar viele) *offene* Mengen $U_i$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$.




$K$ heißt ***relativ kompakt***, wenn $\overline{K}$ kompakt ist.

**Beispiel.**

(a) $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

| | |
|---|---|
| $I = (a, b)$ | offenes Intervall ist offen in $E$ |
| $I = [a, b]$ | abgeschlossenes Intervall ist abgeschlossen in $E$ |
| $I = [a, b)$ | weder offen noch abgeschlossen in $E$ |

Aber jede beliebige metrische Menge $A \subseteq E$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen in $A$.

(b) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Die irrationalen Zahlen sind es auch, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing \qquad \delta\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

(c) {Polynome} ist dicht in $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, Supremumsnorm ([Weierstrass]).

$$\begin{aligned}\overline{\{\text{trigonometrische Polynome}\}} &= \tilde{L}^2([0,2\pi],\mathbb{C})\\ &= \text{endliche Fourier-Summen}\end{aligned}$$

(d) (ohne Beweis)

$K \subset \mathbb{R}^N$ oder $\mathbb{C}^N$ bezüglich üblicher Norm/Metrik ist relativ kompakt $\iff K$ ist beschränkt

(e) (ohne Beweis)

$$K_i \text{ kompakt } (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} K_i \text{ und } \bigcap_{i=1}^{n} K_i \text{ auch kompakt}$$

**Proposition 5.3.**

*(i)* *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen:*

$$\bigcup_{i\in I} A_i^{\mathit{offen}} = \mathit{offen} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathit{offen}} = \mathit{offen}$$

*Für $B \subseteq A \subseteq E$ gilt:*

$$B \text{ offen in } A \iff \exists U \text{ offen in } E \text{ mit } B = A \cap U$$

*(ii)* *Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{abg} = \text{abgeschlossen} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i^{abg} = \text{abgeschlossen}$$

$$B \text{ abgeschlossen in } A \iff \exists V \text{ abgeschlossen in } E \text{ mit } B = A \cap V$$

*(iii)* $\mathring{A} = \bigcup\limits_{B\subseteq A} B$ *mit $B$ offen in $E$ ist die größte in $E$ offene Teilmenge von $A$.*
$\bar{A} = \bigcap\limits_{B\supseteq A} B$ *mit $B$ abgeschlossen in $E$ ist die kleinste in $E$ abgeschlossene Menge, die $A$ enthält.*

*(iv)* $\delta A = \bar{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$ *ist abgeschlossen in $E$.*

*(v)* *Seien alle $C_i$ zusammenhängend, $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \varnothing$. Dann ist $C := \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ zusammenhängend.*

*(vi)* *(ohne Beweis)*

$E_1 \times E_2$ *ist zusammenhängend bzw. komplex* $\iff E_1$ *und* $E_2$ *sind zusammenhängend bzw. komplex*

**Beweis:**

(i) $a \in A := \bigcup_{i\in I} A_i^{\text{offen}}$. Also existiert $i$ mit $a \in A_i^{\text{offen}}$ und $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset A_i \subseteq A$. Also ist $A$ offen.
endlicher Durchschnitt:

$$a \in A := \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\text{offen}} \Longrightarrow \forall i \; \exists \varepsilon_i \text{ mit } B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq A_i$$

$\Longrightarrow B_\varepsilon(x) \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, wenn wir $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ wählen

„$\Leftarrow$“: $b \in B = A \cap U$, $U$ offen in $E$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^E(b) \subset U$. Also

$$B_\varepsilon^A(b) = B_\varepsilon^E(b) \cap A \subset U \cap A = B$$

(ii) Schreibe $\complement A$ für die Komplemente $\complement A := E \setminus A$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} A_i^{\text{abg}} &= \complement\complement\left(\bigcap_{i\in I} A_i^{\text{abg}}\right) \\ &= \underbrace{\complement \bigcap_{i\in I} \underbrace{\left(\complement A_i^{\text{abg}}\right)}_{\text{offen}}}_{\text{offen wg. (i)}} \\ &= \text{abgeschlossen} \end{aligned}$$

Analoge Beweise für $\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{\text{abg}}$ = abgeschlossen und die behauptete Äquivalenz.

(iii) „$\subseteq$“: $a \in \mathring{A} \Longrightarrow B_{\varepsilon(a)} \subseteq \mathring{A}$ für geeignetes $\varepsilon(a)$

$$B := \underbrace{\bigcup_{a\in A} \underbrace{B_{\varepsilon(a)}(a)}_{\text{offen}}}_{\text{offen wg. (i)}} \subseteq \bigcup_{B'\subseteq A} B' \quad \text{mit } B' \text{ offen in } E$$

$$\Longrightarrow \mathring{A} \subseteq \bigcup_{B'\subseteq A} B' \quad \text{mit } B' \text{ offen in } E$$

„$\supseteq$“: $b \in \bigcup_{B\subseteq A} B \quad$ mit $B$ offen in $E$, etwa $b \in B^{\text{offen}} \subseteq A$

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(b) \subset B \subset A \Longrightarrow b \in \mathring{A}$$

(iv)

$$\bar{A} \cap \overline{E \setminus A} = \bar{A} \cap (E \setminus \mathring{A}) = \bar{A} \setminus \mathring{A} =: \delta A$$

( $\overline{E \setminus A} = (E \setminus \mathring{A})$ ist eine Übungsaufgabe )

(v) Sei $x_0 \in \bigcap_{i\in I} C_i^{\text{zsh}}$. Betrachte disjunkte Zerlegung $C = A^{\text{offen}} \mathbin{\dot\cup} B^{\text{offen}}$. Ohne Einschränkung $x_0 \in A$. Dann sind alle Mengen

$$C_i = \underbrace{(A^{\text{offen}} \cap C_i)}_{\text{offen in } C_i} \dot\cup \underbrace{(B^{\text{offen}} \cap C_i)}_{\text{offen in } C_i}$$

Weil $C_i$ zusammenhängend und weil $x_0 \in A \cap C_i$ folgt $B \cap C_i = \varnothing$ $(\forall i)$. Also auch $B = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap B) = \varnothing$.

$\square$

Vorlesung 02.06.2009

*Bemerkung:*

(a) Zu $x \in E$ betrachte

$$C(x) := \bigcup_{x \in C} C^{\text{zsh}} \qquad \text{zusammenhängend (weil } x \in C \text{ für jedes solche } C)$$

Per Konstruktion ist $C(x)$ die größte zusammenhängende Teilmenge von $E$, die $x$ enthält. Man nennt $C(X)$ die ***Zusammenhangskomponente*** von $x$ (in $E$).

(b) $I \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ $I$ ist Intervall

*denn:*

„$\Longrightarrow$“: $I$ ist Intervall heißt: $a, b \in I$ und $x$ zwischen $a$ und $b \Longrightarrow x \in I$. Angenommen die zusammenhängende Menge $I$ wäre kein Intervall. Dann existieren $a < b \in I$ und $a < x < b$ mit $x \notin I$. Setze $A := (-\infty, x) \cap I$ und $B := (x, \infty) \cap I$. Dann ist $I = A \dot\cup B$, $a \in A \neq \varnothing$, $b \in B \neq \varnothing$ und $A, B$ offen in $I$. Also Widerspruch zu $I$ zusammenhängend.

(c) Jede offene Teilmenge $A$ von $\mathbb{R}$ ist Vereinigung höchstens abzählbar vieler Intervalle.

*denn:* $A$ ist disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten und das sind alles offene Intervalle, die jeweils eine rationale Zahl enthalten.

**Beispiel.** *„Die“ Cantormenge*

$$C := \left\{ x \in [0,1] \mid \exists a_i \in \{0,2\} \text{ mit } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 3^{-i} \right\}$$

$C = [0,1]$, aber sukzessive immer offene mittlere Drittel herausnehmen.


Übrig bleibt $C$ (eine Nullmenge).

Eigenschaften der Cantormenge:

(a) vollständig (hier: abgeschlossen)

(b) ***total unzusammenhängend***, d.h.

$$C(x) = \{x\} \quad (\forall x \in C)$$

(c) ***perfekt***, d.h.

$$x \in \overline{C \setminus \{x\}} \quad (\forall x \in C)$$

**Beweis:**

(a)

$$C = [0,1] \setminus \underbrace{\bigcup(\text{offene mittlere Drittel})}_{\text{offen}}$$

Mittelpunkte: $0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 111 \dots \qquad a_i \in \{0,2\}$
Also $C$ abgeschlossen in $[0,1]$, also abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} C \ni x_1 &:= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0 \dots \\ C \not\ni x' &:= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 111 \dots \\ C \ni x_2 &:= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 2 \dots \end{aligned}$$

Also können niemals $x_1 \neq x_2$ in derselben Zusammenhangskomponente (Intervall) liegen.

(c)

$$\begin{aligned} C \ni x_n &:= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n (2 - a_{n+1}) a_{n+2} a_{n+3} \dots \\ &\neq \\ \xrightarrow[n \to \infty]{} x &:= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots \end{aligned}$$

$\square$

Allgemein heißen Mengen $C \neq \varnothing$ Cantormengen, wenn sie vollständig, total unzusammenhängend und perfekt sind.

## 5.2 Metrik und Konvergenz

Stets $(E, d)$ metrischer Raum.

**Definition 5.4.** $x_n$ heißt ***konvergent*** gegen $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $x_n \longrightarrow x$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ : \ d(x_n, x) < \varepsilon$$

(d.h. wenn $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$).

**Definition 5.5.** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt ***Cauchyfolge***, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

*Bemerkung:* $(E, d)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in $E$ einen Limes besitzt, der in $E$ liegt.

**Beispiel.**

$$C = [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = A \mathbin{\dot\cup} B$$
$$A := \left[0, \frac{1}{2}\right) \qquad B := \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$A, B$ offen in $C$
$A = \underbrace{(-1, \frac{1}{2})}_{\text{offen in } \mathbb{R}} \cap C$, also $A$ offen in $C$

**Proposition 5.6.** *Seien $(E_i, d_i)$ metrisch, $E_1 \times E_2$ metrisch mit $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Dann gilt*

$$(E_1 \times E_2, d) \text{ vollständig} \iff (E_1, d_1) \text{ und } (E_2, d_2) \text{ vollständig}$$

**Beweis:**

(a) Konvergenz

$$(x_1^n, x_2^n) \longrightarrow x = (x_1, x_2) \underset{\text{Def.}}{\iff} x_1^n \longrightarrow x_1 \text{ (in } E_1\text{) und } x_2^n \longrightarrow x_2 \text{ (in } E_2\text{)}$$

(b) Cauchyfolgen

$$x^n = (x_1^n, x_2^n) \text{ Cauchyfolge in } E_1 \times E_2 \underset{\text{Def.}}{\iff} x_1^n \text{ Cauchyfolge in } E_1 \text{ und } x_2^n \text{ Cauchyfolge in } E_2$$

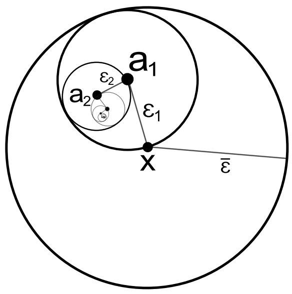
□

**Proposition 5.7.** *Sei $E$ vollständig, $A \subseteq E$ abgeschlossen in $E$. Dann ist auch $A$ vollständig.*

**Satz 5.8** (Satz von Baire (1874-1932))**.** *Sei $E$ vollständig, $A_i$ offen und dicht in $E$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ dicht.*

**Beweis:**

*Idee:* Sei $x \in E$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Finde $a \in \overline{B_\varepsilon}(x) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Wähle $a_1 \in B_\varepsilon(x)$ und $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ mit $\overline{B_{\varepsilon_1}}(a_1) \subset \overline{B_\varepsilon}(x) \cap A_1^{\text{offen}}$.
Wähle sodann sukzessive (induktiv) zu gegebenen $a_{n-1} \in A_{n-1}$, $\varepsilon_{n-1}$ ein $a_n$ und $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$ mit $\overline{B_{\varepsilon_n}}(a_n) \subset \overline{B_{\varepsilon_{n-1}}}(a_{n-1}) \cap A_n^{\text{offen}}$.
Zeige: $a_n \longrightarrow a \in \overline{B_\varepsilon}(x) \cap A$.




*Schritt 1:*

$$\overline{B_{\varepsilon_{m'}}}(a_{m'}) \subseteq \overline{B_{\varepsilon_{m'-1}}}(a_{m'-1})$$

Dies wurde induktiv so konstruiert.

*Schritt 2:* $a_n$ ist Cauchyfolge, also existiert $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ in $E$, vollständig.
denn: Für $m \geq n$ gilt

$$a_m \in \overline{B_{\varepsilon_m}}(a_m) \subseteq \ldots \subseteq \overline{B_{\varepsilon_n}}(a_n)$$

Also

$$d(a_m, a_n) \leq \varepsilon_n \leq 2^{-n} \longrightarrow 0$$

*Schritt 3:*

$$a \in \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap \overline{B_\varepsilon}(x)$$

denn: $a_m \in \overline{B_{\varepsilon_n}}(a_n)$ $(\forall m \geq n)$ abgeschlossen, also vollständig. Darum also für $m \to \infty$:

$$\begin{aligned} a &\in \overline{B_{\varepsilon_n}}(a_n) \subseteq A_n \\ \Longrightarrow a &\in A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \end{aligned}$$

Genauso: $a_n \in \overline{B_\varepsilon}(x)$, abgeschlossen, vollständig.

□

*Bemerkung:*

(a) Sei $X$ vollständig und metrisch, $A \subseteq X$. Wir nennen die Menge $A$ ***generisch*** (auch: ***residual***), wenn $A$ abzählbare Durchschnitte offener und dichter Mengen enthält. $A$ heißt ***mager*** (***dünn***, ***von 1. Baire-Kategorie***), wenn $A$ in einer abzählbaren Vereinigung nirgends dichter Mengen enthalten ist. $A$ heißt ***von 2. Baire-Kategorie***, wenn $A$ nicht ***von 1. Baire-Kategorie*** ist.

$$A \text{ generisch} \Longleftrightarrow X \setminus A \text{ mager}$$
$$A \text{ generisch} \Longrightarrow A \text{ ist von 2. Baire-Kategorie,} \quad \text{aber nicht umgekehrt!}$$

(b) „typisch“ = „meistens“ = generisch sind reelle Zahlen irrational:

$$\mathbb{R} \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus \{a_n\})$$

## 5.3 Metrik und Stetigkeit

Vorlesung 04.06.2009

Stets $(E, d)$, $(E', d')$ etc. metrisch.

**Definition 5.9.** $f : E \to E'$ heißt ***stetig in*** $x_0 \in E$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$f$ heißt ***stetig***, wenn stetig in allen $x_0 \in E$.
$f$ heißt ***homöomorph*** (Homöomorphismus), wenn $f$ bijektiv und $f$, $f^{-1}$ beide stetig.

*Bemerkung:* Alle früheren Sätze über stetige Funktionen, die auf der Dreiecksungleichung beruhen gelten weiter.

(a)

$$f \text{ stetig} \Longrightarrow f(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

(b) $f_1 : E_1 \to E_2$, $f_2 : E_2 \to E_3$ beide stetig

$$\Longrightarrow f = f_2 \circ f_1 : E_1 \to E_3 \text{ stetig}$$

(c) Wenn $f_1, f_2 : E \to E'$ beide stetig und $E'$ ist ein normierter Vektorraum, dann folgt:

$$f_1 + f_2 : E \to E' \text{ mit } x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \text{ ist stetig}$$

(d) Sei $f : E \to E'$ stetig, $E'$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\lambda : E \to \mathbb{K}$ stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f : E \to E' \quad & \text{ist stetig} \\ \frac{1}{\lambda} \cdot f : E \to E' \quad & \text{ist stetig, wo } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

(e) Die Metrik $d$ selbst ist auch stetig.

$$d : \underbrace{E \times E}_{E_1,\ d_1} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{E_2,\ d_2} \quad \text{mit } (x,y) \mapsto d(x,y)$$

denn:

$$\begin{aligned} d_2(d(x,y), d(x_0,y_0)) &\underset{\text{Def.}}{=} |d(x,y) - d(x_0,y_0)| \\ &\leq |d(x,y) - d(x,y_0)| \quad + \quad |d(x,y_0) - d(x_0,y_0)| \\ &\leq d(y,y_0) \quad + \quad d(x,x_0) \\ &\underset{\text{Def.}}{=} d_1((x,y),(x_0,y_0)) \end{aligned}$$

Also ist $d : E \times E \to \mathbb{R}$ sogar Lipschitz-stetig.

**Satz 5.10.** *Sei $f : E \to E'$, beide metrisch. Dann sind äquivalent:*

*(i)* *$f$ ist stetig.*

*(ii)* *$f^{-1}$(offen) = offen, d.h. für jede offene Teilmenge $U'$ von $E'$ gilt: $f^{-1}(U)$ = offen.*

*(iii)* *$f^{-1}$(abg.) = abgeschlossen, d.h. $f^{-1}(A')$ ist abgeschlossen für beliebige abgeschlossene $A'$.*

*(iv)* *$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subseteq E$.*

**Beweis:**

(i) $\Rightarrow$ (iv) Sei $a \in \bar{A}$ beliebig, d.h. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $a_n \in A$. Also

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\in f(A)} \quad \in \overline{f(A)}$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Setze $A := f^{-1}(A')$, $A'$ abgeschlossen, d.h. $A' = \overline{A'}$. Dann gilt

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(A'))} = \overline{A'} = A'$$

$f^{-1}$ darauf anwenden:

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(f(\bar{A})) \subseteq f^{-1}(A') = A \subseteq \bar{A}$$

Also $A = \bar{A}$, abgeschlossen.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $U' \subset E'$, offene Teilmenge. Dann ist $\complement U'$ abgeschlossen und

$$f^{-1}(U') = f^{-1}(\complement(\complement U')) \overset{!}{=} \underbrace{\complement \underbrace{f^{-1} \underbrace{(\complement U')}_{\text{abg.}}}_{\text{abg. wg. (iii)}}}_{\text{offen}}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen (ii) ist $x_0 \in f^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(f(x_0))}_{\text{offen}})$ offen. Foglich existiert $\delta > 0$ mit $x \in B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, d.h.

$$d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$\square$

**Definition 5.11.** Seien $d_1$, $d_2$ zwei Metriken auf derselben Menge $E$. Wir nennen die ***Metriken äquivalent***, wenn $id : (E, d_1) \to (E, d_2)$ ein Homöomorphismus ist.

*Bemerkung:*

(a) Äquivalente Mengen haben dieselben offenen, abgeschlossenen, zusammenhängenden und kompakten Mengen sowie dieselben stetigen Funktionen.
Topologie: Eigenschaften untersuchen, die sich unter Homöomorphismen nicht ändern

(b) ***Normen*** $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ eines Vektorraums $E$ heißen ***äquivalent***, wenn die zugehörigen Metriken $d_k(x, y) := \|x - y\|_k$ äquivalent sind. Weil im Banachraum stetige lineare Abbildungen (wie z.B. $id$) beschränkt sind (und umgekehrt), sind Normen äquivalent $\iff \exists c_1, c_2 > 0$ mit $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ $(\forall x \in E)$.

**Satz 5.12.** *Sei $f : E \to E'$ stetig, $C \subseteq E$ zusammenhängend in $E$. Dann ist $f(C)$ zusammenhängend in $E'$.*
*Kurz:*

$$f \text{ stetig} \implies f(\text{zsh.}) = \text{zusammenhängend}$$

**Korollar 5.13** (Zwischenwertsatz, [Bolzano]). *Sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, $C$ zusammenhängend in $E$ und $a, b \in C$. Dann nimmt $f$ auf $C$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

**Beweis (Korollar):** $f(C) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also Intervall. $\square$

**Beweis (Satz):** Ohne Einschränkung $E = C$, $E' = f(C)$. Sei $E' = f(C) = A' \dot\cup B'$, beide offen, disjunkt. Dann folgt $C = A \dot\cup B$, beide offen, disjunkt mit $A := f^{-1}(A')$, $B := f^{-1}(B')$. Da $C$ zusammenhängend, ist ohne Einschränkung $A = \varnothing$. Also auch $A' = f(A) = \varnothing$. $\square$

## 5.4 Kompakte Mengen

Stets $(E, d)$ metrisch.

**Definition 5.14.** Wir nennen $K \subseteq E$ ***total beschränkt***, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von $K$ durch endlich viele Kugeln mit Radius $\varepsilon > 0$ oder durch endliche viele Mengen $B$ mit Durchmesser $\operatorname{diam}(B) < \varepsilon$ existiert.
$(\operatorname{diam}(B) := \sup\limits_{x_1, x_2} d(x_1, x_2))$

**Satz 5.15.** *Die folgenden drei Bedingungen für $K$ kompakt sind äquivalent:*

*(i)* *(Borel-Lebesgue, überdeckungskompakt):*
*Zu jeder offenen Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine Überdeckung von $K$ durch nur endlich viele der $U_i$.*

*(ii)* *(Bolzano-Weierstrass, folgenkompakt):*
*Jede Folge $x_n$ in $K$ besitzt eine in $K$ konvergente Teilfolge:*

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in K$$

*(iii)* *$K$ ist vollständig und total beschränkt.*

**Beweis:**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Gegeben: Folge $x_n \in K$. Setze $F_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Zu zeigen: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.
*indirekt*: Angenommen $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$. Setze $U_n := K \setminus F_n$, offen. $\bigcup_{n \geq 1} U_n = K$.
Nach (i) genügt auch ein endlicher Teil:

$$\exists n_0 \;:\; \bigcup_{k=1}^{n_0} U_k = K$$

Wähle $n > n_0$. Dann folgt

$$x_n \in K = \bigcup_{k=1}^{n_0} U_k = K \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} F_k = K \setminus \underbrace{F_{n_0}}_{\ni x_n}$$

$$\Longrightarrow x_n \notin K \Longrightarrow \text{Widerspruch!}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zeige: $K$ vollständig und total beschränkt.
*vollständig:* Sei $x_n$ Cauchyfolge in $K$. Wegen (ii) hat $x_n$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \longrightarrow x \in K$. Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig sowie:

$$\begin{aligned} k_0 \text{ mit } d(x_{n_k}, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall k \geq k_0) \\ k_1, n_* \text{ mit } d(x_n, x_{n_k}) &< \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geq n_*;\; \forall k \geq k_1 \geq k_0) \end{aligned}$$

Also

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_*)$$

*total beschränkt:* (indirekt) Wäre $K$ nicht total beschränkt gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass jeder Versuch $K$ durch endlich viele $\varepsilon_0$-Kugeln zu überdecken scheitert. Dann können wir aber induktiv Punkte $x_n \in K$ finden, sodass für $x_0$ beliebig:

$$d(x_{n+1}, x_k) \geq \varepsilon_0 \qquad (\forall k = 1, \dots, n)$$

Dann kann es aber keine konvergente Teilfolge geben, weil Cauchy mit $\frac{\varepsilon_0}{2}$ scheitert.
$\Longrightarrow$ Widerspruch zu (ii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) (indirekt) Angenommen wir hätten offene Überdeckung $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^{\text{offen}} \supseteq K$ ohne endliche Teilüberdeckung. Zu $\varepsilon_n := 2^{-n}$ betrachte jeweils endliche Überdeckungen von $K$ durch $\varepsilon_n$-Kugeln (total beschränkt). Das erlaubt die sukzessive Auswahl von Kugeln $B_n = B_{2^{-n}}(x_n)$ mit folgenden Eigenschaften:
$B_0$ ohne endliche Teilüberdeckung durch $U_\lambda$, $B_n$ ebenso und $B_n \cap B_{n+1} \neq \varnothing$.
Sei nämlich $B_n$ ohne endliche Teilüberdeckung durch die $U_\lambda$ schon konstruiert. Von den endlich vielen $\varepsilon_{n+1}$-Kugeln, die $B_n$ überhaupt schneiden muss es dann auch wieder eine ohne endliche Teilüberdeckung geben. Diese wählen wir für $B_{n+1}$.
*(1) Behauptung:* $x_n$ sind Cauchyfolge, also konvergent (da $K$ vollständig).
denn:

$$\begin{aligned} a &\in B_n \cap B_{n+1} \\ d(x_n, x_n + 1) &\leq d(x_n, a) + d(a, x_{n+1}) \\ &\leq 2^{-n} \cdot (\underbrace{1}_{a\in B_n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a\in B_{n+1}}) = \frac{3}{2} \cdot 2^{-n} \end{aligned}$$

Also für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ induktiv:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \frac{3}{2} \cdot (2^{-n} + 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} + \ldots + 2^{-(n+p-1)}) \\ &\leq \frac{3}{2} \cdot 2^{-n} \cdot 2 = 3 \cdot 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Also Cauchyfolge.
*(2) Widerspruch* für $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in U_{\lambda_0}$ (definiere $\lambda_0 \in \Lambda$ so!).
Weil $U_{\lambda_0}$ offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0}$. Wähle nun $n$ so groß, dass

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann folgt aber

$$B_n = B_{2^{-n}}(x_n) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0}$$

und ist sogar durch ein einziges $U_{\lambda_0}$ überdeckt.
$\Longrightarrow$ Widerspruch zur Konstruktion von $B_n$.

□

*Bemerkung:*

(a) Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ oder $\mathbb{C}^N$. Dann:

$$K \text{ kompakt} \iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

($K = [0, 1]$: Heine (1821-1881))
denn:

$$\begin{aligned} K \text{ kompakt} &\iff K \text{ vollständig und total beschränkt} && \text{(wegen (iii))} \\ &\iff K \text{ abgeschlossen und total beschränkt} && (\mathbb{R}^N,\ \mathbb{C}^N \text{ vollständig}) \\ &\iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt} && (\varepsilon \cdot \mathbb{Z}^N\text{-Gitter in } \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

(c) Beschränkte Mengen im unendlich dimensionalen Hilbert-Raum müssen nicht unbedingt total beschränkt sein.

**Beispiel.** $\tilde{L}^2$ und die Menge $\{\sqrt{2} \cdot \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq$ Einheitskugel in $\tilde{L}^2$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} 2\sin^2(nx)\, \mathrm{d}x = 1$$

$$\|s_m - s_n\|_{\tilde{L}^2} = \sqrt{2} \text{ für } m \neq n$$

**Satz 5.16.** *Sei $f : E \to E'$ stetig, $K \subseteq E$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt.*
*(kurz: $f^{stetig}$(kompakt) = kompakt)*

**Beweis:** Betrachte beliebige Folge $y_n := f(x_n)$ in $f(K)$ mit $x_n \in K$. Weil $K$ kompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \longrightarrow x \in K$.
Weil $f$ stetig ist $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) \in f(K)$ ebenfalls konvergente Teilfolge. Also $f(K)$ kompakt. □

**Satz 5.17.** *Sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, $E$ kompakt. Dann nimmt $f$ auf $E$ sein Minimum und Maximum an.*

**Beweis:** $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also

$$\begin{array}{llccccc} \text{beschränkt} & -\infty < & \inf_E f & \leq & \sup_E f & < & \infty \\ & & = & & = & & \\ \text{und abgeschlossen} & & \min_E f & & \max_E f & & \end{array}$$

□

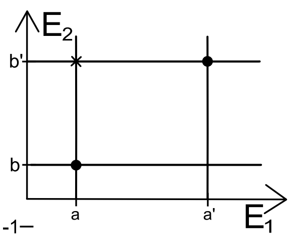
Nachtrag zu Satz 5.3 (vi):

$$E_1 \times E_2 \text{ kompakt/zusammenhängend} \iff E_1 \text{ und } E_2 \text{ kompakt/zusammenhängend}$$

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: Ohne Einschränkung zeige $E_1$ ist kompakt/zusammenhängend.
Die Projektion $p_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$ mit $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ist stetig. Wegen $f$(kompakt) = kompakt und $f$(zusammenhängend) = zusammenhängend für $f$ stetig ist $E_1$ kompakt/zusammenhängend.

„$\Leftarrow$“: *kompakt:* $(x_{1n}, x_{2n}) \in E_1 \times E_2$ hat konvergente Teilfolge.
Wähle konvergente Teilfolge $x_{1n_k}$ und konvergente Teilfolge $x_{2n_{k_j}}$.
$\Longrightarrow (x_{1n_k}, x_{2n_{k_j}})$ konvergiert in $E_1 \times E_2$.
*zusammenhängend:* Betrachte $(a, b), (a', b') \in E_1 \times E_2$ beliebig. Zeige: $(a, b), (a', b')$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente von $E_1 \times E_2$.
Betrachte $Z := (\{a\} \times E_2) \cup (E_1 \times \{b'\})$. Weil $(a, b), (a', b') \in Z$, zusammenhängend, liegen $(a, b), (a', b')$ in derselben Zusammenhangskomponente von $E_1 \times E_2$.




-1–

$\square$

**Satz 5.18.** *Sei* $f : E^{kpt} \to E'$ *stetig. Dann ist* $f$ **gleichmäßig stetig**, *d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Beweis:** (indirekt) Angenommen

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \text{ existiert } d(x_n, y_n) < \delta \text{ mit } d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Da $E$ kompakt ist existieren konvergente Teilfolgen, sodass $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow x$. Weil $f$ stetig ist gilt dann auch $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, $f(y_n) \longrightarrow f(x)$. Dann folgt aber $d'(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$. Also kann so ein $\varepsilon_0$ nicht existieren. $\square$

Vorlesung 11.06.2009

**Definition 5.19.** $\mathcal{C}^0(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig }\}$ ist für kompakte $X$ ein metrischer Raum mit der ***Supremums-Metrik***

$$d(f,g) := \max_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Dieses Maximum existiert, weil $d_Y(f(x), g(x))$ in $x \in X$ (kompakt) stetig ist.
(Vergleiche Banach-Raum stetiger Funktionen, falls $Y$ Banach-Raum ist.)

*Bemerkung:* Sei $Y$ vollständig, $X$ kompakt. Dann ist auch $(\mathcal{C}^0(X,Y), d)$ vollständig.
denn: Sei $f_n$ Cauchy-Folge in $\mathcal{C}^0(X,Y)$.

$$f(x) := \lim_{\text{n} \to \infty} f_n(x)$$

Wie früher ist $f$ stetig:

$$\begin{array}{rcllll} d_Y(f(x), f(y)) & \leq & d_Y(f(x), f_n(x)) & + \; d_Y(f_n(x), f_n(y)) & + \; d_Y(f_n(y), f(y)) \\ & \leq & \frac{\varepsilon}{3} & + \; \frac{\varepsilon}{3} & + \; \frac{\varepsilon}{3} \\ & \leq & \varepsilon & & \end{array}$$

(für $d_X(x,y) \leq \delta = \delta(n, \varepsilon)$;  $f_n$ ist gleichmäßig stetig)

**Definition 5.20.** $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{C}^0(X,Y)$ heißt ***gleichgradig stetig***, wenn

$$\forall x_0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \; : \; d(x', x_0) < \delta \implies d(f(x'), f(x_0)) < \varepsilon \qquad (\forall f \in \mathfrak{F})$$

$\delta$ hängt hier nicht von $f$ ab!

**Satz 5.21** (Arzela und Ascoli)**.** *Sei* $\varnothing \neq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{C}^0(X,Y)$, *$X$ kompakt, $Y$ vollständig. Dann ist $\mathfrak{F}$ genau dann relativ kompakt (d.h. $\overline{\mathfrak{F}}$ ist kompakt), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

*(i)* $\mathfrak{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathfrak{F}\}$ *ist relativ kompakt* ($\forall x$).

*(ii)* $\mathfrak{F}$ *ist gleichgradig stetig.*

**Beweis:**

„$\Rightarrow$“: $\overline{\mathfrak{F}}$ ist kompakt, zeige (i) und (ii)

(i) Für $x \in X$ beliebig betrachte die stetige Abbildung (Auswertung in $x$, Projektion)

$$p_x : \mathcal{C}^0(X,Y) \to Y \qquad \text{mit} \quad f \mapsto f(x)$$

$$\mathfrak{F}(x) = p_x(\mathfrak{F}) \subseteq \underbrace{p_x}_{\text{stetig}}(\underbrace{\overline{\mathfrak{F}}}_{\text{kompakt}}) \quad \text{ist kompakt}$$

Also $\overline{\mathfrak{F}}(x) =$ kompakt (im vollständigen Raum $Y$).

(ii) Überdecke die kompakte Menge $\overline{\mathfrak{F}}$ durch Kugeln $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$, $i = 1, \dots, n$, total beschränkt ($\varepsilon > 0$ beliebig, $x_0 \in X$). Weil alle $f_i$ in $x_0$ stetig sind, existiert $\delta_i > 0$ mit

$$d_X(x, x_0) < \delta_i \Longrightarrow d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wähle $\delta := \min\limits_{i=1,\dots,n} \delta_i > 0$. Dann folgt für beliebige $f \in \mathfrak{F}$:

$$\exists f_i \quad \text{mit} \quad d(f_i, f) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(Kugeln!)}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & d_X(x,x_0) < \delta \le \delta_i \Longrightarrow \\ & \quad d_Y(f(x), f(x_0)) \le d_Y(f(x), f_i(x)) + d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) + d_Y(f_i(x_0), f(x_0)) \\ & \qquad\qquad \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ & \qquad\qquad \le \varepsilon \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$": Zeige $\mathfrak{F}$ kompakt, d.h. vollständig und total beschränkt

vollständig: abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $\mathcal{C}^0(X,Y)$

total beschränkt: Überdecke $\mathfrak{F}$ durch endlich viele Mengen $V_\varphi$ mit Durchmesser $\varepsilon$. Weil $\mathfrak{F}$ gleichgradig stetig ist, existiert zu $\varepsilon$ und jedem $x \in X$ ein $\delta = \delta(x) > 0$, sodass gilt

$$x' \in B_{\delta(x)}(x) \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\forall f \in \mathfrak{F})$$

Da $X$ kompakt ist überdecken schon endlich viele Kugeln $B_i := B_{\delta(x_i)}(x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ die gesamte Menge $X$ (überdeckungskompakt).
Wir wissen ferner, dass alle $\mathfrak{F}(x_i)$ relativ kompakt sind. Also ist $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{F}(x_i)} \subseteq Y$ überdeckt durch endlich viele Kugeln $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_j)$ in $Y$ $(j = 1, \dots, m)$.
Zu jeder Abbildung $\varphi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ definiere jetzt

$$V_\varphi := \{f \in \mathcal{C}^0(X,Y) \mid x \in B_i \Longrightarrow f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_{\varphi(i)}) \qquad \forall i = 1, \dots, n\}$$

*1. Behauptung:* Die $V_\varphi$ überdecken $\mathfrak{F}$.
denn: $x$ muss stets in einem $B_i$ liegen, weil $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \supseteq X$. $f(x_i)$ muss in einem $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_j)$ liegen, weil diese $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{F}(x_i)$ überdecken. Setze $\varphi(i) :=$ ein solches $j$, um zu sehen, dass $f \in V_\varphi$.

*2. Behauptung:* $\operatorname{diam}(V_\varphi) \le \varepsilon$ $(\forall \varphi)$
Seien $f, g \in V_\varphi \cap \mathfrak{F}$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\begin{array}{lcccccccc} d(f(x),g(x)) & \le & d(f(x),f(x_i)) & + & d(f(x_i),y_{\varphi(i)}) & + & d(y_{\varphi(i)},g(x_i)) & + & d(g(x_i),g(x)) \\ & & \downarrow x \in B_i & & \downarrow f \in V_\varphi & & \downarrow g \in V_\varphi & & \downarrow x \in B_i \\ & \le & \frac{\varepsilon}{4} & + & \frac{\varepsilon}{4} & + & \frac{\varepsilon}{4} & + & \frac{\varepsilon}{4} \\ & \le & \varepsilon & & & & & & \end{array}$$

$$\underset{\sup_x}{\Longrightarrow} d(f,g) \le \varepsilon, \qquad \operatorname{diam}(V_\varphi) \le \varepsilon$$

Also ist $\overline{\mathfrak{F}}$ vollständig und total beschränkt $(\#\varphi = m^n)$, also kompakt. □

**Beispiel.** $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$.
$\mathfrak{F}$ ist relativ kompakt, wenn jedes $\mathfrak{F}(x)$ beschränkt und $\mathfrak{F}$ gleichgradig stetig ist.
Z.B. sind Mengen $\mathfrak{F}$ Lipschitz-stetiger Funktionen mit Lipschitz-Konstante $L(f) \le C$ $(\forall f \in \mathfrak{F})$ gleichgradig stetig oder Mengen von Funktionen mit beschränkter Ableitung.
(Lipschitz-stetig: $\quad d_Y(f(x), f(y)) \le L \cdot d_X(x,y) \quad (\forall x, y)$)

## 5.5 Banach'scher Fixpunktsatz

Sei $(E,d)$ metrischer Raum.

**Definition 5.22.** Wir nennen $F : E \to E$ ***Kontraktion***, wenn $F$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$, d.h.

$$\exists 0 \le L < 1 \ : \ d(F(x), F(y)) \le L \cdot d(x,y)$$

**Satz 5.23** (Banach'scher Fixpunktsatz)**.** *Sei $E$ vollständig, $F : E \to E$ Kontraktion. Dann besitzt $F$ genau einen Fixpunkt $x_* \in E$, d.h. $F(x_*) = x_*$. Für jeden Startwert $x_0 \in E$ konvergiert die Iteration $x_{n+1} := F(x_n)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ gegen $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$.*
*Es gilt lineare (geometrische) Konvergenz:*

$$d(x_*, x_n) \le L^n \cdot d(x_*, x_0)$$

*und praktischer*

$$d(x_*, x_n) \le \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_1, x_0)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} & & d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(F(x_{n+1}), F(x_n)) \\ & & &\le L \cdot d(x_{n+1}, x_n) \\ \underset{\text{iterieren}}{\Longrightarrow} (1)_{n,j} & & d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) &\le L^j \cdot d(x_{n+1}, x_n) \\ \underset{\Delta}{\Longrightarrow} (2)_{n,k} & & d(x_{n+k}, x_n) &\overset{\Delta}{\le} d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ & & &\overset{(1)}{\le} (1 + \dots + L^{k-1}) \cdot d(x_{n+1}, x_n) \\ & & &\le \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (x_n)$ sind Cauchy-Folge, $\quad x_* := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
$\Longrightarrow F(x_*) = F(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*$
Ferner

$$\begin{aligned}(2)_{n,k} \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} d(x_*, x_n) &\leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_1, x_0)\\ d(x_*, x_{n+1}) &= d(F(x_*), F(x_n)) \leq L \cdot d(x_*, x_n)\\ \underset{\text{iterieren}}{\Longrightarrow} d(x_*, x_n) &\leq L^n \cdot d(x_*, x_0)\end{aligned}$$

$\square$

Vorlesung 16.06.2009

**Satz 5.24** (Variante: Fixpunktsatz mit Parametern)**.** *Seien $\Lambda, E$ metrisch, $E$ vollständig, $F : \Lambda \times E \to E$ mit $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ stetig und uniforme Kontraktion bezüglich $x$, d.h.*

$$\exists 0 < L < 1\ \forall \lambda \in \Lambda\ \forall x, y \in E\ :\ d(F(\lambda, x), F(\lambda, y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

*Dann haben wir für jedes $\lambda \in \Lambda$ einen eindeutigen Fixpunkt $x_*(\lambda)$ der Abbildung $x \mapsto F(\lambda, x)$ $(x_*(\lambda) = F(\lambda, x_*(\lambda)))$. Die Abbildung $\Lambda \to E$ mit $\lambda \mapsto x_*(\lambda)$ ist stetig, d.h. der Fixpunkt $x_*(\lambda)$ hängt stetig vom Parameter $\lambda \in \Lambda$ ab.*

**Beweis:** Nach Satz existieren die Fixpunkte $x_*(\lambda)$. Zeige Stetigkeit.
Kurz: $x_{*0} = x_*(\lambda_0)$, $x_* = x_*(\lambda)$
Stetigkeit von $\lambda \mapsto F(\lambda, x_{*0})$:

$$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \delta > 0\ :\ d(\lambda, \lambda_0) < \delta \Longrightarrow d(F(\lambda, x_{*0}), F(\lambda_0, x_{*0})) < \varepsilon_0$$

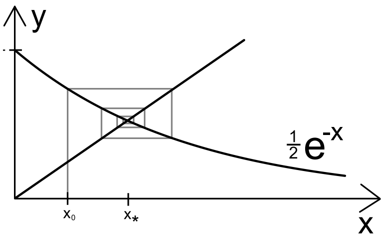
Dann gilt für solche $\lambda$ auch

$$\begin{aligned} d(x_*, x_{*0}) &= d(F(\lambda, x_*), F(\lambda_0, x_{*0}))\\ &\leq d(F(\lambda, x_*), F(\lambda, x_{*0})) + d(F(\lambda, x_{*0}), F(\lambda_0, x_{*0}))\\ &< L \cdot d(x_*, x_{*0}) + \varepsilon_0\\ \Longrightarrow d(x_*, x_{*0}) &< \frac{1}{1-L} \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon \end{aligned}$$

für $\varepsilon_0 := (1-L) \cdot \varepsilon$ $\square$

**Beispiel.** Löse $x = \frac{1}{2} e^{-x}$.
$E := [0, \infty)$ vollständig.

$$\begin{aligned} F(x) &:= \frac{1}{2} e^{-x}\\ |F'(x)| &= \left| -\frac{1}{2} e^{-x} \right| \leq -\frac{1}{2}\\ \Longrightarrow |F(x) - F(y)| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \text{ für } x, y \geq 0 \end{aligned}$$

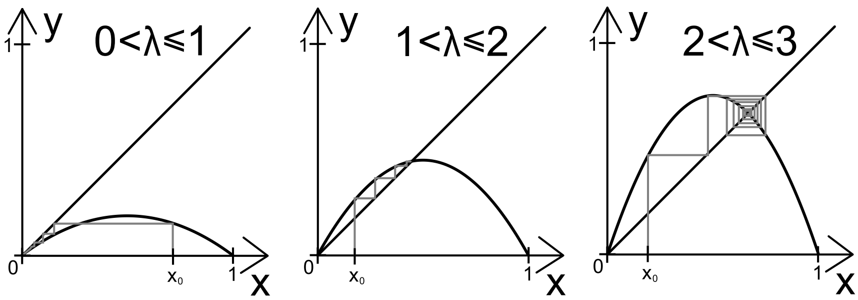



Finde also die Lösung $x = x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ wobei $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \geq 0$ beliebig.

*Stabile Fixpunkte*
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ mit Fixpunkt $x_* = F(x_*)$. Sei $|F'(x_*)| < 1$. Wähle ein echtes abgeschlossenes Intervall $I$ um $x_* \in \mathring{I}$, sodass $L := \sup_{x \in I} |F'(x)| < 1$. Wegen des Mittelwertsatzes ist $F$ eine $L$-Kontraktion auf $I$:

$$|F(x) - F(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Mit $y := x_*$ folgt $F : I \to I$.
Folglich gilt $x_* = \lim_{n \to \infty} x_n$ für jede Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \in I$. Man nennt $x_*$ ***lokal asymptotisch stabil*** unter der Iteration $F$.




*Selbstähnliche Mengen*

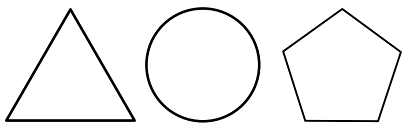
**Definition 5.25.** Sei $E$ metrisch, $f_i : E \to E$, $i = 1, \ldots, N$. Wir nennen $\varnothing \neq A \subseteq E$ ***selbstähnlich*** zu den $f_i$ wenn gilt

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$$

$A$ ist sozusagen „symmetrisch“ oder „ähnlich“ bezüglich aller Abbildungen $f_i$ zugleich.

**Beispiel.**

1. $N = 1$, $f(x) = x + 1$ auf $E = \mathbb{R}$. $A = \mathbb{Z}$
   Oder $N = 1$, $E = \mathbb{R}^2$. Dann stellt $f$ eine Drehung dar.



2. $N = 2$, $E = [0, 1]$

$$f_1(x) := \frac{1}{3} \cdot x \qquad f_2(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot x$$

   $A =$ Cantormenge

triadische Darstellung: $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$
$f_1$ macht $a_1 = 0$, $f_2$ macht $a_1 = 2$, also $a_1 \neq 1$ usw.

$$\begin{aligned} A = f_1(A) \cup f_2(A) &= \bigcup_i f_i(A) = \bigcup_{i,j} (f_i \circ f_j)(A) \\ &= \bigcup_{i,j,k} (f_i \circ f_j \circ f_k)(A) = \ldots \end{aligned}$$

**Satz 5.26.** *Sei $E$ metrisch und vollständig, $f_i : E \to E$ eine $L$-Kontraktion zu $L < 1$, $i = 1, \ldots, N$. Dann existiert unter allen nichtleeren kompakten Teilmengen $A$ von $E$ genau eine selbstähnliche.*

**Beweis:** Betrachte $E' := \{A \subseteq E \mid \varnothing \neq A \text{ kompakt}\}$. Es ist bekannt, dass $E'$ bezüglich des symmetrischen Hausdorff-Abstandes

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist (Übungsaufgabe).
Definiere $F : E' \to E'$, $F(A) := \bigcup\limits_{i=1}^{N} f_i(A)$.
*NB:* $A$ selbstähnlich $\iff F(A) = A$
Zeige also nur: $F$ ist Kontraktion.

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &= \max \left\{ \sup_{a' \in F(A)} d(a', F(B)), \sup_{b' \in F(B)} d(b', F(A)) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{a' \in \bigcup f_i(A)} d(a', \bigcup_{j=1}^{N} f_j(B)), \sup_{b' \in \bigcup f_j(B)} d(b', \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{a \in A} d(f_i(a), f_i(B)), \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{b \in B} d(f_i(b), f_i(A)) \right\} \\ &\overset{(*)}{\leq} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{a \in A} L \cdot d(a, B), \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{b \in B} L \cdot d(b, A) \right\} \\ &\leq L \cdot \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\} \\ &\leq L \cdot d_H(A, B) \end{aligned}$$

$$(*) \qquad d(f_i(a), f_i(B)) = \inf_{b \in B} d(f_i(a), f_i(b)) \leq \inf_{b \in B} L \cdot (a, b)$$

□

Praktische Durchführung:
Starte mit Menge $A_0 := \{x_0\}$. Statt $A_{n+1} := F(A_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} f_i(A_n)$ auszuwerten, lieber gleich-wahrscheinlich würfeln welches $i$ drankommt:

$$A_{n+1} := \underbrace{f_i}_{\text{zufällig}} (A_n)$$

Fast sicher: $A_n \longrightarrow A_* = F(A_*)$

**Beispiel** (Sierpinski-Dreieck)**.** $f_i$: zentrale Streckung zur Ecke $i$ hin. Faktor $= \frac{1}{2}$. Es handelt sich um eine selbstähnliche Menge.
Fläche:

$$\begin{aligned}|A_0| &= 1\\ |A_1| &= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot |A_0|\\ |A_{n+1}| &= \frac{3}{4} \cdot |A_n| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot |A_0|\\ \longrightarrow |A| &= 0\end{aligned}$$

# 6 Differenzieren im Banachraum

Vorlesung 23.06.2009

## 6.1 Ableitung

Seien $X, Y$ Banachräume über $\mathbb{R}$.
(Erinnerung: $\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \mid \text{beschränkt, linear}\}$ ist Banachraum)

**Definition 6.1.** Sei $x_0 \in U \subseteq X$, $U$ offen und $f : U \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt $f$ ***Fréchet-differenzierbar in*** $x_0$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $A : X \to Y$ gibt, so dass für $h \underset{X}{\longrightarrow} 0$ gilt

$$Y \ni f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + o(\|h\|_X)$$

wobei

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|_X)}{\|h\|_X} = 0$$

Dann heißt $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ die ***Ableitung*** von $f$ in $x_0$ und ist die beste lineare Approximation an $f$ in $x_0$.

$$f'(x_0) = \mathcal{D}f(x_0) := A$$

Ist $f$ in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so heißt $f$ ***differenzierbar in*** $U \subseteq X$.
Wir nennen $f$ ***stetig differenzierbar in*** $U$, falls zusätzlich die Abbildung

$$\mathcal{D}f : X \to \mathcal{L}(X,Y) \quad \text{mit} \quad x_0 \mapsto \mathcal{D}f(x_0)$$

stetig ist.

*Bemerkung:*
Wie in Kapitel III beschreibt $h \mapsto Ah$ die beste lineare Approximation von $h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0)$. Die durch diese Abbildung beschriebene „Ebene“ ersetzt dabei die Tangente aus III.

$$\text{Graph}(h \mapsto A \cdot h + f(x_0)) = \text{Tangentialraum in } x_0 \text{ (Graph}(f))$$

Fortgesetztes Mikroskopieren (Zoomen) macht $f$ schließlich linear. Dies ist damit das Bindeglied zwischen (lokaler) Analysis und linearer Algebra.

$$\frac{1}{\varepsilon}\text{-Mikroskop:} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon \cdot h) - f(x_0)}{\varepsilon} = f'(x_0) \cdot h$$

**Beispiel.**

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$
Dann können wir $A$ als $m \times n$-Matrix schreiben:

$$A = (a_{kl}) \quad \text{mit } 1 \leq k \leq m \text{ und } 1 \leq l \leq n$$

$A = f'(x_0)$ heißt auch ***Jacobi-Matrix*** von $f$ in $x_0$.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_l} = \mathcal{D}_l f_k(x_0) = \partial_{x_l} f_k(x_0) \\ &= \big(f'(x_0) \cdot e_l\big)_k = f_k'(x_0) \cdot e_l \\ &:= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f_k(x_0 + t \cdot e_l) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_k(x^0 + \varepsilon \cdot e_l) - f_k(x^0)}{\varepsilon} \\ x_l &\mapsto f_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{l-1}^0, x_l, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_l} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (\varepsilon \mapsto f(x^0 + \varepsilon \cdot e_l)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{l-1}^0, x_l^0 + \varepsilon, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0) \end{aligned}$$

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Konkret: $n = m = 2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ \mathcal{D}f(x_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_1(y, x_2^0)\Big|_{y=x_1^0} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_1(x_1^0, y)\Big|_{y=x_2^0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2(y, x_2^0)\Big|_{y=x_1^0} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_2(x_1^0, y)\Big|_{y=x_2^0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Ableitung:

$$A = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor an die Kurve

(c) $m = 1$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. „Höhe“ in $x$.

$$\begin{aligned} f'(x^0) &= (\partial_{x_1} f(x_0), \dots, \partial_{x_n} f(x_0)) \\ &= \nabla f(x_0) = \operatorname{grad}(f(x_0)) \qquad \textbf{\textit{Gradient}} \end{aligned}$$

$\nabla f \neq 0$ aufgefasst als Vektor in $\mathbb{R}^n$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon \cdot h) - f(x_0)}{\varepsilon} = \nabla f'(x_0) \cdot h + \cancel{\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

Wird auf $\{h \mid \|h\| = 1\}$ maximal in $h = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.

*Linearisierung:*

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \\ \operatorname{Graph}(g) &= T_{x_0} \operatorname{Graph}(f) \\ &= \{(x, f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0))\} \\ \vec{n} &= (-\nabla f(x_0), 1) \\ y_0 &= (x_0, f(x_0)) \\ y &= (x, f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)) \\ (y - y_0) \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

*Eindeutigkeit:*
Falls eine Ableitung $f'(x_0) = A$ existiert, so ist sie eindeutig.
Angenommen $\tilde{A}$ wäre ebenfalls eine Ableitung.

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot h + o(\|h\|) &= f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + o(\|h\|) \\ (\tilde{A} - A) \cdot h &= o(\|h\|) \\ (\tilde{A} - A) \cdot \frac{h}{\|h\|} &= \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \underset{\|h\| \to 0}{\longrightarrow} 0 \\ (\tilde{A} - A) \cdot e &= 0 \qquad \forall \, \|e\| = 1 \\ \tilde{A} - A &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel.**

(i) $f$ linear, $f(x) = A \cdot x$, $A : X \to Y$ sei linear und stetig. Dann ist $f$ auf $X$ stetig differenzierbar mit

$$f'(x_0) = \mathcal{D} f(x_0) = A : X \to Y$$

denn wegen Linearität:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h) = f(x_0) + A \cdot h$$

Vorlesung 25.06.2009

(ii) Sei $f : X_1 \times X_2 \to Y$ bilinear und stetig, d.h. $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ und $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ sind jeweils linear und $f$ ist stetig. Schreibweise oft:

$$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2) &= [x_1^0+h_1,x_2^0+h_2] \\
&= [x_1^0+h_1,x_2^0]+[x_1^0+h_1,h_2] \\
&= [x_1^0,x_2^0] \qquad + \underbrace{[h_1,x_2^0]+[x_1^0,h_2]}_{\text{linear in } h_1,\ h_2} + [h_1,h_2] \\
&= f(x_0) \qquad + f'(x_0)\cdot h \qquad + \underbrace{o(|h|)}_{\text{sogar } \mathcal{O}(|h|^2)}
\end{aligned}$$

<u>denn:</u> ganz ähnlich wie für lineare Abbildungen gilt auch für bilineare Abbildungen, dass

$$\text{stetig} \iff \text{beschränkt}$$

Dabei heißt $[\cdot,\cdot]$ ***beschränkt***, wenn

$$\exists C>0\ \forall h_1\in X_1\ \forall h_2\in X_2\ :\ |[h_1,h_2]|\le C\cdot|h_1|\cdot|h_2|$$

Also $|[h_1,h_2]|\le C'\cdot|h|^2$, etwa mit $|h|=\max\{|h_1|_{X_1},|h_2|_{X_2}\}$

$$[\alpha_1h_1,\alpha_2h_2]=\alpha_1\alpha_2[h_1,h_2]$$

(iii) Sei $f: X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\to Y$ multilinear und stetig, d.h. alle $x_i\mapsto f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ sind jeweils linear und $f$ ist stetig.
Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x_1^0+h_1,\ldots,x_n^0+h_n) = \quad & \underbrace{f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}_{\text{keine } h_1}+\underbrace{f(h_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)+\ldots+f(x_1^0,\ldots,x_{n-1}^0,h_n)}_{\text{nur jeweils ein } h_i} \\
& +\underbrace{f(h_1,h_2,\ldots,x_n^0)+\ldots}_{\text{ein } h_i \text{ und ein } h_j \text{ mit } i\neq j} \\
& \vdots \\
& +\underbrace{f(h_1,\ldots,h_n)}_{\text{immer } h_i} \\
= \quad & f(x_1^0,\ldots,x_n^0)+\underbrace{\sum_{i=1}^n f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,h_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)}_{=f'(x_0)\cdot h}+o(|h|)
\end{aligned}$$

<u>denn:</u> $n$-multilineare Abbildung, also wieder:

alle $h_i\mapsto[h_1,\ldots,h_n]$ stetig $\iff$ beschränkt, d.h.

$$\exists C\ :\ |[h_1,\ldots,h_n]|\le C\cdot|h_1|\cdot\ldots\cdot|h_n|$$

(iv) $\det:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$ mit $A=(a_{ij})\mapsto\det A=\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}\pi\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\pi(n)}$ ist $n$-multilinear bezüglich seiner $n$ Spalten

$$a_j:=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}\in X_j:=\mathbb{R}^n$$

Ableitung von det nach $A$:

$$\det{}'(A) \cdot H = \sum_{j=1}^{n} \det(a_1, \dots, h_j, \dots, a_n) \qquad (f := \det \text{ in (iii)})$$

Dabei sind die $h_j$ die Spalten der Matrix $H$.

## 6.2 Sätze

**Satz 6.2** (Kettenregel)**.** *Seien $X, Y, Z$ Banachräume, $f : X \supseteq U^{\text{offen}} \to Y$ differenzierbar in $x_0 \in U$, $g : Y \supseteq V^{\text{offen}} \to Z$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0) \in V$. Dann ist $g \circ f : U' \to Z$ differenzierbar in $x_0 \in U'^{\text{offen}}$ mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

*Kurz: Die beste lineare Approximation der Komposition ist die Komposition der besten linearen Approximationen.*

**Beweis:**

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h) & r(h) &= o(|h|) & (1)\\ g(y_0 + \eta) &= g(y_0) + g'(y_0) \cdot \eta + s(\eta) & s(\eta) &= o(|\eta|) & (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h) &= g(f(x_0 + h)) \\ &\overset{(1)}{=} g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0) \cdot h + r(h)}_{:=\eta}) \\ &\overset{(2)}{=} g(y_0) + g'(y_0) \cdot (f'(x_0) \cdot h + r(h)) + s(\eta) \\ &= (g \circ f)(x_0) + \underbrace{g'(y_0) \cdot f'(x_0)}_{=(g\circ f)'(x_0)} \cdot h + \underbrace{\underbrace{g'(y_0)}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{r(h)}_{o(|h|)}}_{o(|h|)} + s(\eta) \end{aligned}$$

Wenn wir noch zeigen, dass $s(\eta) = o(|h|)$, haben wir den Satz bewiesen.

$$\frac{s(\eta)}{|h|} = \underbrace{\frac{s(\eta)}{|\eta|}}_{o(1) \text{ für } \eta \to 0} \cdot \frac{|\eta|}{|h|} \overset{?}{\underset{h \to 0}{\longrightarrow}} 0$$

*NB:* Weil $f$ differenzierbar in $x_0$, also dort auch stetig ist, gilt

$$h \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \eta = f(x_0 + h) - f(x_0) \longrightarrow 0$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\frac{|\eta|}{|h|}$ für $h \longrightarrow 0$ beschränkt ist.

$$\frac{|\eta|}{|h|} \leq \left| f'(x_0) \cdot \frac{h}{|h|} \right| + \left| \frac{r(h)}{|h|} \right| \leq \|f'(x_0)\| + o(1) \leq C$$

also beschränkt. □

**Beispiel.**

(i) $g(y) = A \cdot y$, beschränkt und linear

$$\Longrightarrow (Af)'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{g} \cdot f'(x_0) = Af'(x_0)$$

(ii) Wie (i) mit $A := \alpha \cdot \mathrm{id}_Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow (\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$$

(iii) Wie (i) mit $Y := \tilde{Y} \times \tilde{Y}$, $Z := \tilde{Y}$. $g(y_1, y_2) := y_1 + y_2$ beschränkt und linear, $f(x) := (f_1(x), f_2(x))$ eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f_i : X \to \tilde{Y}$.

$$f'(x_0) \cdot h = (f_1'(x_0) \cdot h, f_2'(x_0) \cdot h)$$

Nach Satz

$$(f_1 + f_2)'(x_0) \cdot h = (g \circ f)'(x_0) \cdot h \underset{g \text{ linear}}{=} g(f'(x_0)) \cdot h = f_1'(x_0) \cdot h + f_2'(x_0) \cdot h$$

(iv) Seien $X, \tilde{Y}, Y$ wie in (iii) aber $g : Y \to Z$ bilinear und stetig, $g(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[f_1, f_2]'(x_0) \cdot h = (g \circ f)'(x_0) \cdot h &= g'(f_1(x_0), f_2(x_0)) \cdot (\underbrace{f_1'(x_0) \cdot h}_{h_1}, \underbrace{f_2'(x_0) \cdot h}_{h_2}) \\
&\underset{g \text{ bilinear}}{=} g(f_1(x_0), h_2) + g(h_1, f_2(x_0)) \\
&= [f_1(x_0), f_2'(x_0) \cdot h] + [f_1'(x_0) \cdot h, f_2(x_0)]
\end{aligned}$$

*Produktregel:* $X = \tilde{Y} = Z = \mathbb{R}$, $[y_1, y_2] = y_1 \cdot y_2$

$$\begin{aligned}
(f_1 \cdot f_2)'(x_0) \cdot h &= f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot h + f_1'(x_0) \cdot h \cdot f_2(x_0) \\
(f_1 \cdot f_2)' &= f_1 \cdot f_2' + f_1' \cdot f_2
\end{aligned}$$

*Skalarprodukt:* $X = \mathbb{R}^n$, $\tilde{Y} = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}$. $[y_1, y_2] := y_1^T \cdot y_2$
Einsetzen ergibt

$$(f_1^T \cdot f_2)'(x_0) \cdot h = f_1(x_0)^T \cdot f_2'(x_0) \cdot h + (f_1'(x_0) \cdot h)^T \cdot f_2(x_0)$$

$$\text{tückisch:} \qquad (f_1^T \cdot f_2)' = f_1^T \cdot f_2' + f_1'^T \cdot f_2$$

**Satz 6.3.** *Seien $X, Y$ Banachräume, $x_0 \in U^{\text{offen}} \subseteq X$, $f : U \to V^{\text{offen}} \subseteq Y$ mit $x_0 \mapsto y_0 := f(x_0)$ sei Homöomorphismus (d.h. $f, f^{-1}$ beide stetig). Sei $f$ differenzierbar in $x_0$ und $f'(x_0)$ besitze ebenfalls beschränkte (lineare) Inverse $(f'(x_0))^{-1}$. Dann ist die* **Inverse** *$g := f^{-1} : V \to U$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit Ableitung* Vorlesung 30.06.2009

$$g'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}$$

*Kurz: Die beste lineare Approximation der Inversen ist die Inverse der besten linearen Approximation.*

**Beweis:** Definiere

$$f(x_0 + h) := y_0 + \eta$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot h + \underbrace{r(h)}_{o(|h|)} \\
&= y_0 + \eta - y_0 = \eta \\
g(y_0 + \eta) - g(y_0) &= x_0 + h - x_0 = h \\
&= \big(f'(x_0)\big)^{-1} \cdot \eta - \big(f'(x_0)\big)^{-1} \cdot r(h)
\end{aligned}$$

Zeige nur

$$s(\eta) := \big(f'(x_0)\big)^{-1} \cdot r(h) = o(|\eta|)$$

Weil $f$ ein Homöomorphismus ist, gilt

$$h \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \eta \longrightarrow 0$$

Betrachte also

$$\begin{aligned}
\frac{|s(\eta)|}{|\eta|} &= \frac{|s(\eta)|}{|h|} \cdot \frac{|h|}{|\eta|} \\
&= \underbrace{\frac{|r(h)|}{|h|} \cdot \big(f'(x_0)\big)^{-1}}_{=o(1)} \cdot \frac{|h|}{|\eta|}
\end{aligned}$$

Zeige nur, dass $\frac{|h|}{|\eta|}$ beschränkt ist für $h \longrightarrow 0$. Dafür wird noch eine andere Abschätzung benötigt:

$$\begin{aligned}
\big|f'(x_0) \cdot h\big| &\leq \big\|f'(x_0) \cdot h\big\| \\
|h| &\leq \Big|\big(f'(x_0)\big)^{-1}\Big| \cdot \big\|f'(x_0) \cdot h\big\| \\
\Longrightarrow \big\|f'(x_0) \cdot h\big\| &\geq \frac{1}{\Big|\big(f'(x_0)\big)^{-1}\Big|} \cdot |h| \\
&\geq \frac{1}{\Big\|\big(f'(x_0)\big)^{-1}\Big\|} \cdot |h|
\end{aligned}$$

Nun zurück zur eigentlichen Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{|h|}{|\eta|} &= \frac{|h|}{|f'(x_0) \cdot h + r(h)|} \\
&\leq \frac{|h|}{\|f'(x_0) \cdot h\| - \frac{r(h)}{|h|} \cdot |h|} \\
&\leq \frac{\cancel{|h|}}{\frac{1}{\|(f'(x_0))^{-1}\|} \cdot \cancel{|h|} - \underbrace{\frac{r(h)}{|h|}}_{o(1)} \cdot \cancel{|h|}} \\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|(f'(x_0))^{-1}\|}} \qquad \text{(für } |h| \text{ klein)} \\
&= 2 \cdot \Big\|\big(f'(x_0)\big)^{-1}\Big\|
\end{aligned}$$

Also beschränkt. $\square$

Nun stellt sich die Frage, ob der Mittelwertsatz für Banachräume gilt.
Zur Erinnerung: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einmal stetig differenzierbar, gilt für ein geeignetes $\xi \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

Dafür findet man jedoch leicht ein Gegenbeispiel:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &:= (\cos t, \sin t, \varepsilon \cdot t) \\ f'(t) &= (\underbrace{-\sin t, \cos t}_{\neq 0(\ \forall t)}, \varepsilon) \\ \text{aber} \quad f(t+2\pi) - f(t) &= (0,0,2\pi\varepsilon) \neq 2\pi \cdot f'(\xi) \end{aligned}$$

Allerdings gilt der Schrankensatz.

**Satz 6.4** (Schrankensatz)**.** *Seien $X, Y$ Banachräume, $a, b \in X$. Definiere die Strecke*

$$\overline{ab} := \{a + \tau(b-a) \mid 0 \leq \tau \leq 1\} \subseteq S^{\textit{offen}}$$

*Sei außerdem $f : S \to Y$ stetig differenzierbar. Dann gilt die Abschätzung*

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{\xi \in \overline{ab}} \left\| f'(\xi) \right\| \cdot (b-a)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ (f(a + \tau(b-a))) \ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ (f(a+\tau(b-a))) \right| \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left| f'(a + \tau(b-a)) \cdot (b-a) \right| \ \mathrm{d}t \qquad \text{(Kettenregel)} \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\left| f'(a+\tau(b-a)) \right|}_{\leq M} \cdot |b-a| \ \mathrm{d}t \\ &\leq M \cdot |b-a| \end{aligned}$$

$\square$

## 6.3 Partielle Ableitungen

**Definition 6.5.** Seien $X, Y$ Banachräume, $x_0 \in U^{\text{offen}} \subseteq X$, $f : U \to Y$ und $e \in X$. Die „Schul"-Ableitung der (partiellen) Abbildung

$$t \mapsto f(x_0 + t \cdot e)$$

in $t=0$ heißt ***partielle Ableitung*** (auch ***Richtungsableitung*** oder ***Gateaux-Ableitung***) von $f$ in $x_0$ in Richtung $e$, sofern sie existiert.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f_k(x_0+t\cdot e) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cdot e)-f(x_0)}{t}\\ &= df(x_0,e)=\mathcal{D}_e f(x_0)=\partial_e f(x_0)\\ &= \partial_{e_i} f(x_0)=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_0) \qquad (X=\mathbb{R}^n, e=e_i)\\ &= f_{x_i}(x_0)=\partial_{x_i}f(x_0)=\dots\end{aligned}$$

Analog für $X=X_1\times X_2$, $x^0=(x_1^0,x_2^0)$, $x=(x_1,x_2)$:
Wir nennen die Ableitungen der partiellen Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto f(x_1,x_2^0) \qquad \text{in } x_1^0\\ x_2 &\mapsto f(x_1^0,x_2) \qquad \text{in } x_2^0\end{aligned}$$

die ***partiellen Ableitungen*** $f_{x_1}(x^0), f_{x_2}(x^0)$ von $f$ in $x^0$, sofern sie existieren.

**Satz 6.6.** *Seien $X_1, X_2, Y$ Banachräume, $f: U\to Y$, $x\in U^{\text{offen}}\subseteq X=X_1\times X_2$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &f \text{ ist Fréchet-differenzierbar in } U \text{ mit stetiger Ableitung } f'(x)\\ \iff\ &f \text{ ist Gateaux-differenzierbar in } U \text{ mit stetigen partiellen Ableitungen } f_{x_1}, f_{x_2}\end{aligned}$$

*Ferner gilt für $h=(h_1,h_2)\in X$, $x_0\in U$:*

$$f'(x_0)\cdot h = f_{x_1}(x_0)\cdot h_1 + f_{x_2}(x_0)\cdot h_2$$

**Beweis:**

(i) Fréchet $\Longrightarrow$ Gateaux:
Sei $x^0\in U$ beliebig, fest. Betrachte die Einbettung

$$i_1: X_1\to X_1\times X_2 \qquad \text{mit} \qquad x_1\mapsto (x_1,x_2^0)$$

Dann stimmt die partielle Abbildung

$$x_1\mapsto f(x_1,x_2^0)$$

überein mit $(f\circ i_1)$. Also existiert

$$f_{x_1}(x^0)=f'(x^0)\cdot \underbrace{(h_1,0)}_{i_1'(x_1^0)\cdot h_1}$$

Ebenso für $f_{x_2}$. Die Stetigkeit der $f_{x_j}$ folgt aus der Stetigkeit von $f'$ und $i_j$.

(ii) Gateaux $\Longrightarrow$ Fréchet:

$$\begin{aligned}&\left|f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0)-f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)\cdot h_1-f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)\cdot h_2\right|\\ \le &\underbrace{\left|f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0+h_2)-f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)\cdot h_1\right|}_{\text{Schrankensatz}}\\ &+\underbrace{\left|f(x_1^0,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0)-f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)\cdot h_2\right|}_{o(|h_2|)}\\ \le &\underbrace{\max_{0\le\tau<1}\left|f_{x_1}(x_1^0+\tau h_1,x_2^0+h_2)-f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)\right|}_{\text{stetig! } o(1)}\cdot|h|+o(|h_2|)=o(|h|)\end{aligned}$$

$\square$

**Beispiel** („Unbeispiel“).
$X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ Vorlesung 02.07.2009

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & x_1 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases}$$

unstetig in $x = 0$. Betrachte

$$f(t^2, t) = \begin{cases} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Richtungsableitung (mit $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$):

$$\begin{aligned} df(x^0 = 0, h) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(th) - f(0)) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{th_1 \cdot t^2 h_2^2}{t^2 h_1^2 + t^4 h_2^4} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{h_1 \cdot h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4} \\ &= \frac{h_2^2}{h_1} && \text{für } h_1 \neq 0 \\ df(x^0 = 0, h) &= 0 && \text{für } h_1 = 0 \end{aligned}$$

Aber $f$ ist nicht Fréchet-differenzierbar in $x^0 = 0$, schon weil $f$ dort unstetig ist.

*Bemerkung:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 df(x_0 + sh, h) \, \mathrm{d}s$$

denn:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x_0 + sh) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + (s+t)h) - f(x_0 + sh)}{t} \\ &= df(x_0 + sh, h) \qquad \text{(per Definition)} \end{aligned}$$

**Satz 6.7.** *Seien $X, Y$ Banachräume, $U \subseteq X$, $f : U \to Y$. Die partiellen Ableitungen sollen existieren und*

$$df : U \times X \to Y \quad \textit{mit} \quad (x_0, h) \mapsto df(x_0, h)$$

*sei stetig. Dann ist die Abbildung*

$$df(x_0, \cdot) : X \to Y \quad \textit{mit} \quad h \mapsto df(x_0, h)$$

*linear.*
*Wenn zusätzlich*

$$\overline{df} : U \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \textit{mit} \quad x_0 \mapsto df(x_0, \cdot)$$

*stetig ist, dann ist $f : U \to Y$ stetig Fréchet-differenzierbar und natürlich gilt*

$$f'(x_0) \cdot h = df(x_0, h)$$

**Beweis:**

(i) Linearität:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

$$df(x_0, \alpha h) = \lim_{t \to 0} \alpha \cdot \frac{1}{\alpha t} \cdot (f(x_0 + t\alpha h) - f(x_0))$$

Substituiere $\tau = \alpha t$. Da $\alpha$ konstant ist, kann statt $t \to 0$ auch $\tau \to 0$ betrachtet werden. Also folgt

$$df(x_0, \alpha h) = \alpha \cdot df(x_0, h)$$

Bleibt noch zu zeigen, dass

$$df(x_0, h_1 + h_2) = df(x_0, h_1) + df(x_0, h_2)$$

Betrachte dazu

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t} \cdot \Big( f(x_0 + t(h_1 + h_2)) - f(x_0) - t \cdot df(x_0, h_1) - t \cdot df(x_0, h_2) \Big) \\
=&\frac{1}{t} \cdot \Big( f(x_0 + \underbrace{t(h_1}_{\text{„}h\text{“}} + h_2)) - f\,\underbrace{(x_0 + th_2)}_{\text{„}x_0\text{“}} + \underbrace{f(x_0 + th_2) - f(x_0) - t \cdot df(x_0, h_2)}_{o(1)} - t \cdot df(x_0, h_1) \Big) \\
=&o(1) + \frac{1}{t} \cdot \int_0^1 \Big( df(x_0 + th_2 + sth_1, th_1) - t \cdot df(x_0, h_1) \Big) \,\mathrm{d}s \qquad \text{(Bemerkung)} \\
=&o(1) + \cdot \int_0^1 \underbrace{\Big( df(x_0 + th_2 + sth_1, h_1) - df(x_0, h_1) \Big)}_{df \text{ stetig} \Rightarrow o(1)} \,\mathrm{d}s \\
=&o(1)
\end{aligned}$$

(ii) Gateaux $\Longrightarrow$ Fréchet:
Sei $A(x_0) \cdot h := df(x_0, h)$. Betrachte

$$\begin{aligned}
|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0) \cdot h| &= \left| \int_0^1 \Big( df(x_0 + sh, h) - A(x_0) \cdot h \Big) \,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_0^1 \underbrace{|A(x_0 + sh) - A(x_0)|}_{o(1) \text{ für } |h| \to 0} \cdot |h| \,\mathrm{d}s = o(|h|)
\end{aligned}$$

$\square$